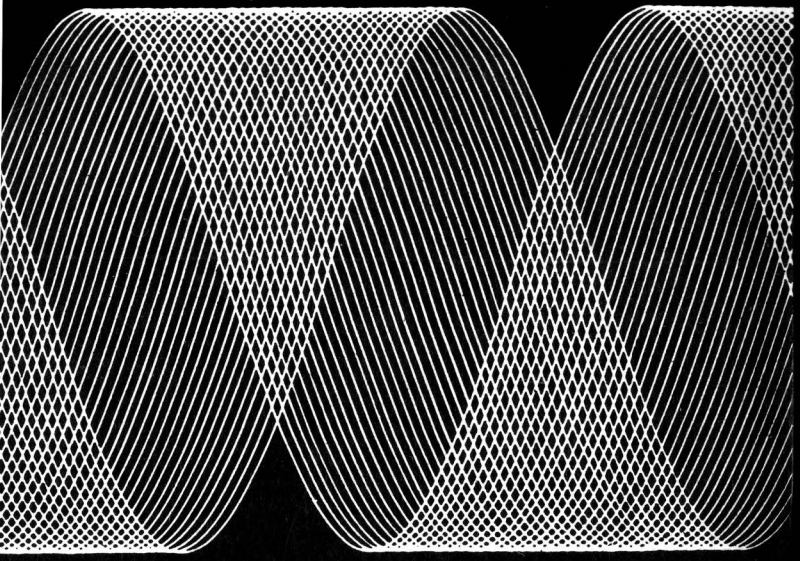
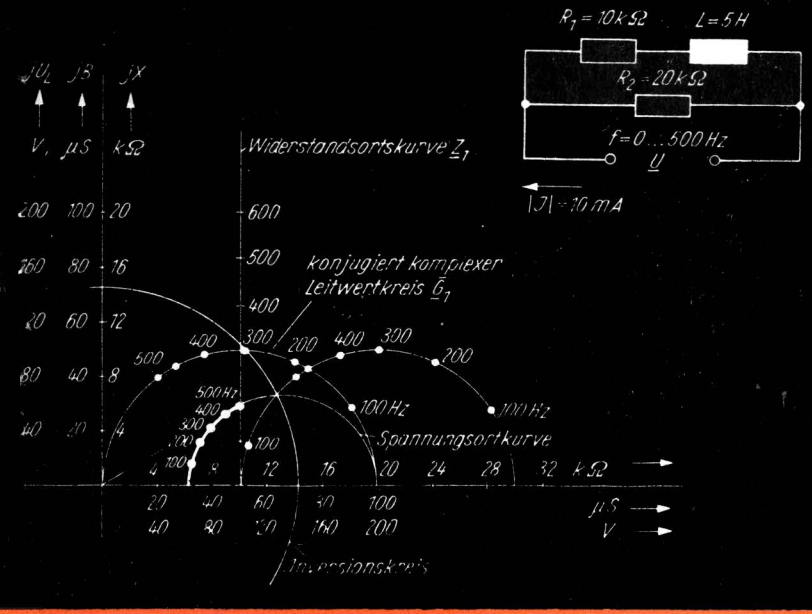
amateurreihe

electronica





Horst Frey

164

Einführung in die Ortskurventheorie

LEER

electronica . Band 164

HORST FREY

Einführung in die Ortskurventheorie

MILITÄRVERLAG
DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN
REPUBLIK

© Militärverlag der Deutschen Demokratischen Republik (VEB) — Berlin, 1974

Inhalt

	Vorwort	5
1.	Was sind Ortskurven?	6
2.	Darstellung von Wechselgrößen	8
2.1.	Das Liniendiagramm	8
2.2.	Das Zeigerdiagramm	9
2.3.	Die symbolische oder komplexe Methode	9
2.3.1.	Die 3 Hauptformen der komplexen Zahl	12
2.3.2.	Die konjugiert komplexe Zahl	13
2.3.3.	Darstellung von komplexen Widerständen	14
3.	Grundbegriffe der Ortskurventheorie	18
3.1.	Die Inversion	18
3.1.1.	Rechnerische Inversion eines Punktes	18
3.1.2.	Zeichnerische Inversion eines Punktes	20
3.1.3.	Zeichnerische Inversion von Kurven	27
4.	Ortskurven komplexer Widerstände und Leitwerte	30
4.1.	Ortskurven bei konstanter Frequenz und variablen Schaltelementen	30
4.1.1.	Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität	30
4.1.2.	Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität	32
4.1.3.	Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität	33
4.1.4.	Parallelschaltung von Widerstand und Kapazität	34
4.2.	Ortskurven bei variabler Frequenz und konstanten Schaltelementen	34
4.2.1.	Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität	35
4.2.2.	Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität	36

4.2.3. Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität 37
4.2.4. Parallelschaltung von Widerstand und Kapazität 38
4.3. Ortskurven des Reihenresonanzkreises 39
4.4. Ortskurven des Parallelresonanzkreises 40
4.5. Beispiele einfacher Ortskurven 41
4.6. Prinzipdarstellung von Ortskurven einiger Grundschaltungen 55
4.7. Ortskurven zusammengesetzter Schaltungen ... 55

5. Ortskurven von Strom und Spannung 68

6. Kreisdiagramme 78
6.1. Das Widerstandsdiagramm 79
6.1.1. Umwandlung von Widerständen in Leitwerte und umgekehrt 80
6.1.2. Umwandlung einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung und umgekehrt 83
6.1.3. Aufgaben aus der Leitungstechnik 86
6.2. Das Smith-Diagramm 96
6.2.1. Umwandlung von Widerständen in Leitwerte und umgekehrt 97
6.2.2. Aufgaben aus der Leitungstechnik 98

7. Ausgewählte Beispiele zur praktischen Anwendung von Ortskurven 102
7.1. Ortskurve des Eingangswiderstands eines Halbwellendipols mit T-Abgriff 102
7.2. Ortskurven des Scheinwiderstands von Stabilisatorröhren 106
7.3. Ortskurven von Transistoren 107
7.4. Ortskurve eines Anpassungsübertragers 113

8. Literaturhinweise 118

Vorwort

Mit Ortskurven läßt sich grafisch darstellen, wie sich komplexe Größen, z. B. Widerstände, Leitwerte, Spannungen und Ströme usw., in Abhängigkeit einer anderen Größe, z. B. der Frequenz oder der Werte von Schaltelementen, ändern.

Der große Vorteil der Ortskurven liegt darin, daß mit einem Blick das Verhalten einer elektrischen Größe sowohl nach Betrag als auch nach Phase sofort erfaßt werden kann. Damit ist eine getrennte Darstellung von Betragskurven und Phasenverläufen nicht mehr notwendig.

Diese Broschüre soll allgemeinverständlich in die Ortskurvendarstellung einführen. Sie wird besonders dem jungen Nachrichtentechniker, aber auch dem interessierten Fortgeschrittenen helfen, sich mit dieser Theorie mehr als bisher zu beschäftigen und die gewonnenen Erkenntnisse in der täglichen Praxis anzuwenden. Die grundsätzlichen Regeln für die Konstruktion von einfachen Ortskurven sind deshalb erläutert und bei den zahlreichen durchgerechneten Beispielen angewendet. Darüber hinaus sollen all die, die sich an unseren Fachschulen weiterqualifizieren und die sich mit dieser Darstellungsart von Wechselgrößen im Studium befassen müssen, unterstützt und angeleitet werden.

Die Darstellungsart wurde so gewählt, daß der Leser in das physikalische Geschehen hineingestellt ist und gleichsam die Entwicklung und das Lösen der Probleme mitgestaltet. Jedes Buch braucht die kritischen Hinweise seiner Leser. Sie werden dankend anerkannt.

Erfurt, im Juni 1977 *Horst Frey*

1. Was sind Ortskurven?

Bestimmte elektrische Wechselgrößen, sei es die Spannung, der Strom oder der Widerstand usw., lassen sich als Zeiger darstellen. Auf diese Weise ist es möglich, die Reihenschaltung einer Spule mit einem Ohmschen Widerstand in der komplexen Zahlenebene als einen Zeiger mit einer bestimmten Länge und einem bestimmten Winkel zur reellen Achse grafisch wiederzugeben (Bild 1.1). Man wendet diese Darstellungsart immer dort an, wo konstante Verhältnisse vorliegen, d. h. wenn der induktive Wiedrstand einen festen Wert aufweist. Er hat aber nur dann einen konstanten Wert, wenn die Frequenz der angelegten Spannung ebenfalls konstant ist.

Was passiert aber, wenn sich die Frequenz ändert? Mit der Frequenz ändert sich auch der Widerstand der Spule, also der Gesamtwiderstand. Die Zeigerspitze beschreibt nun abhängig von der Frequenz eine bestimmte Kurve, die Ortskurve der betreffenden Größe. Durch die Darstellung einer Größe als Ortskurve wird es möglich, mit einem Blick vorteilhaft die gesamte Änderung der elektrischen Größe nach Betrag und Phase zu erfassen.

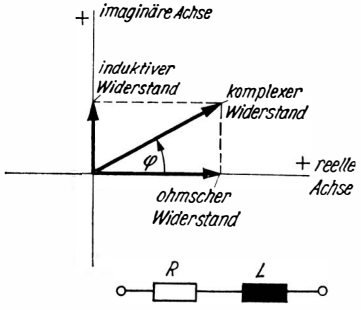


Bild 1.1
Zeigerdarstellung einer Reihenschaltung von Widerstand und Spule

Bild 1.2 zeigt als praktisches Beispiel die Ortskurve des Scheinwiderstands der Tunneldiode *GE 115* im Bereich von 0 Hz bis 2000 MHz. Dabei wird der genannte Vorteil der Ortskurvendarstellung deutlich sichtbar.

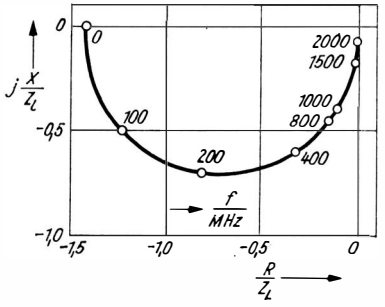


Bild 1.2
Ortskurve des Scheinwiderstands der Tunneldiode *GE 115* (I = 0,6 mA)

Um Ortskurven konstruieren zu können, muß man sich mit bestimmten Grundbegriffen und Gesetzmäßigkeiten befassen. Der Anfänger sollte sich deshalb schrittweise und systematisch mit diesen Dingen beschäftigen. Eine Wiederholung des Rechnens mit komplexen Zahlen ist dabei zweckmäßig, da sie eine wichtige Grundlage der Ortskurvendarstellung sind.

2. Darstellung von Wechselgrößen

Unter Wechselgrößen versteht man ganz allgemein veränderliche elektrische Größen, die in Abhängigkeit der Zeit nicht nur ihren Betrag, sondern auch die Phase ändern. Das können Spannung, Strom, Feldstärke, magnetischer Fluß usw. sein. Ändert sich der zeitliche Ablauf sinusförmig, so handelt es sich um eine harmonische Wechselgröße. Die sinusförmige Spannung kann man nun wie folgt mathematisch beschreiben:

$$u = u_m \sin(\omega t + \varphi_0); \tag{2.1}$$

u — Augenblickswert, u_m — Amplitude, ω — Kreisfrequenz, φ_0 — Anfangsphase.
Solche Wechselgrößen lassen sich anschaulich durch das Liniendiagramm oder durch das Zeigerdiagramm darstellen.

2.1. Das Liniendiagramm

Die sinusförmige Spannung entsprechend Gl. (2.1) ist in Bild 2.1 als Liniendiagramm, auch Zeitfunktion genannt, dargestellt. Der zeitliche Verlauf der Spannung ist dabei sofort

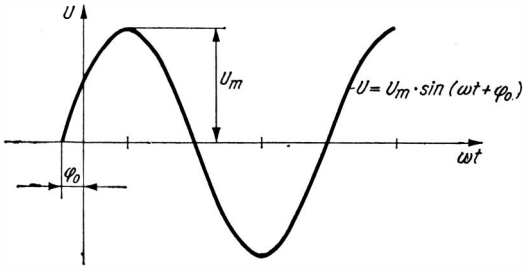


Bild 2.1 Liniendiagramm

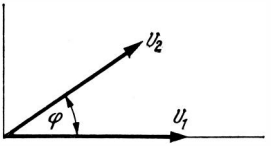


Bild 2.2
Zeigerdiagramm zweier phasenverschobener Spannungen

zu übersehen, die Darstellungsart allerdings recht umständlich.

2.2. Das Zeigerdiagramm

Das Zeigerdiagramm oder Zeigerbild ist weitaus besser geeignet, Wechselgrößen bildhaft wiederzugeben. Besonders deutlich ist dies bei unterschiedlichen Größen hinsichtlich der Amplitude und der Phase (Bild 2.2).
Die Amplitude wird dabei durch die Länge des Zeigers und die Phasenverschiebung durch den Winkel φ angegeben.
Da man die Frequenz der Schwingung im Zeigerbild natürlich nicht ersehen kann, sind nur solche Größen im gemeinsamen Zeigerbild darstellbar, die die gleiche Frequenz haben.
Bild 2.3 zeigt den bestehenden Zusammenhang zwischen Liniendiagramm und Zeigerbild. Hier ist deutlich die grafische Konstruktion der Sinusschwingung aus dem Zeigerbild zu ersehen.
Bild 2.4 zeigt 2 Beispiele für Liniendiagramm und Zeigerbild.

2.3. Die symbolische oder komplexe Methode

Von der einfachen Zeigerdarstellung von Wechselgrößen kann man leicht zur komplexen oder symbolischen Methode übergehen. Dazu werden der oder die Zeiger in die Gaußsche Zahlenebene gelegt und dem Zeiger eine komplexe Zahl zugeordnet. Durch diese eindeutige Zuordnung von Zeiger und komplexer Zahl ist die Angabe des rotierenden Zeigers, der die Wechselgröße darstellt, durch eine komplexe Zahl möglich.

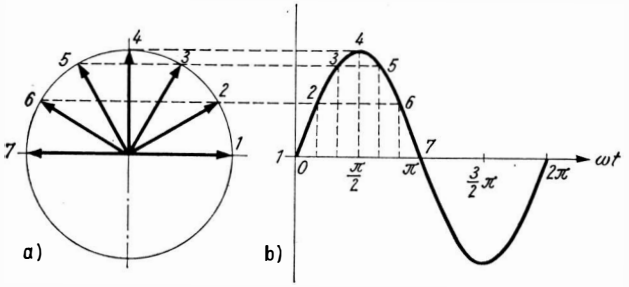


Bild 2.3 Zusammenhang zwischen a — Zeigerbild und b — Liniendiagramm

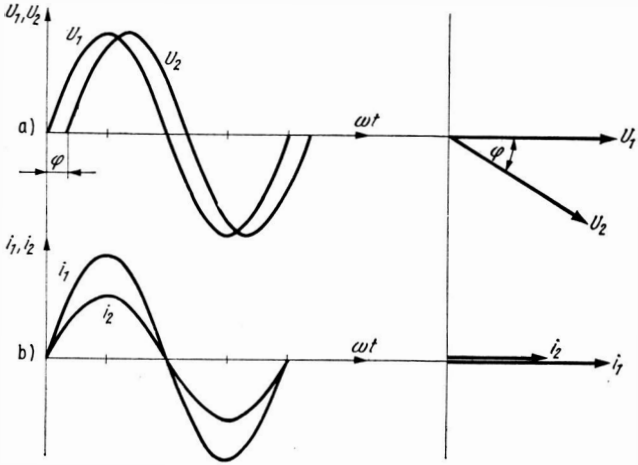


Bild 2.4 Beispiele für Liniendiagramm und Zeigerbild; a — phasenverschobene Spannungen gleicher Amplitude, b — phasengleiche Ströme ungleicher Amplitude

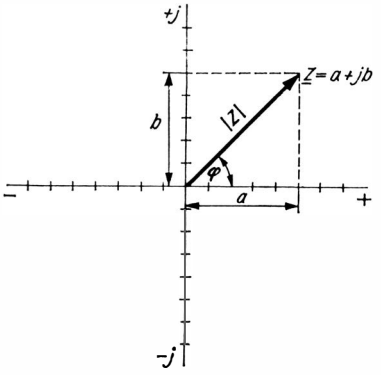


Bild 2.5
Darstellung einer komplexen Zahl in der *Gaußschen* Zahlenebene

Zum besseren Verständnis dieser Problematik scheint es angebracht, einige Grundlagen des Rechnens mit komplexen Zahlen zu wiederholen.
Eine komplexe Zahl

$$\underline{Z} = a + jb$$

wird in der Gaußschen oder komplexen Zahlenebene nach Bild 2.5 dargestellt. Sie setzt sich also aus dem Realteil a und dem Imaginärteil b zusammen. In $\underline{Z}$ darf man nicht nur einen Punkt oder eine komplexe Zahl sehen, sondern einen Zeiger mit einer entsprechenden Länge und einem bestimmten Winkel zur reellen Achse.
Die Länge des Zeigers entspricht dem Betrag der komplexen Zahl und errechnet sich, da ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, nach

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{2.2}$$

Der vom Zeiger und der reellen Achse gebildete Winkel ergibt sich aus

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}\,; \tag{2.3}$$

der Winkel φ ist das Argument der komplexen Zahl.

Der Zeiger ist also eindeutig durch den absoluten Betrag $|\,Z\,|$ (Länge) und den Winkel φ (Phase) festgelegt.

2.3.1. Die 3 Hauptformen der komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl kann in 3 Hauptformen dargestellt werden:

— allgemeine Form

$$\underline{Z} = a + jb; \tag{2.4}$$

— trigonometrische Form

$$\underline{Z} = |\,Z\,| \cos \varphi + j\,|\,Z\,| \sin \varphi\,; \tag{2.5}$$

— Exponentialform

$$\underline{Z} = |\,Z\,| \cdot e^{j\varphi}. \tag{2.6}$$

Die Umwandlung der allgemeinen Form in die trigonometrische Form läßt sich nach den aus Bild 2.5 entnehmbaren Beziehungen

$$\cos \varphi = \frac{a}{|\,Z\,|} \text{ und } \sin \varphi = \frac{b}{|\,Z\,|} \tag{2.7}$$

leicht beweisen.
Stellt man Gl. (2.7) um, ergibt sich

$$a = |\,Z\,| \cos \varphi \text{ und } b = |\,Z\,| \sin \varphi.$$

Werden diese Ausdrücke in Gl. (2.4) eingesetzt, so entsteht die trigonometrische Form

$$\begin{aligned} Z &= a + jb, \\ Z &= |\,Z\,| \cos \varphi + j\,|\,Z\,| \sin \varphi, \\ Z &= |\,Z\,| (\cos \varphi + j \sin \varphi). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Mit der von *Euler* aufgestellten Beziehung

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

erhält man die Exponentialform

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= |\,Z\,| (\cos \varphi + j \sin \varphi), \\ \underline{Z} &= |\,Z\,| e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

2.3.2. Die konjugiert komplexe Zahl

Zwei komplexe Zahlen sind zueinander konjugiert (im Zeichen $\underline{Z}$ und $\overline{\underline{Z}}$), wenn sie sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden. So ist

$$\overline{\underline{Z}} = a - jb$$

die konjugiert komplexe Zahl zu

$$\underline{Z} = a + jb.$$

Nach Gl. (2.2) sind die Beträge beider Zahlen gleich

$$|Z| = |\overline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Der Unterschied liegt in den beiden Argumenten

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}; \qquad \tan \overline{\varphi} = -\frac{b}{a}.$$

Das heißt, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\underline{Z}}$ liegt spiegelbildlich in bezug auf die reelle Achse zur Zahl $\underline{Z}$ (Bild 2.6).

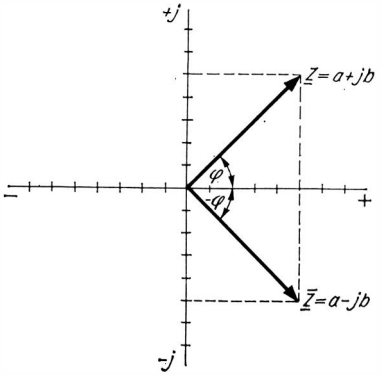


Bild 2.6
Spiegelbildliche Lage der konjugiert komplexen Zahl $\underline{Z}$ zu $\overline{\underline{Z}}$

2.3.3. Darstellung von komplexen Widerständen

Wegen des unmittelbaren Zusammenhangs zwischen Zeiger und komplexer Zahl lassen sich die in Abschnitt 2.3.1. genannten Hauptformen auch auf elektrische Größen, wie Spannung, Strom, Widerstand usw. anwenden.

Man versinnbildlicht praktisch eine sinusförmige Wechselgröße durch eine komplexe Größe und stellt damit eine reale physikalische Größe durch eine symbolische Größe dar. Dieser Schritt vereinfacht das Rechnen mit Wechselgrößen [1]. Spannung und Strom wird als komplexe Größe wie folgt angegeben:

$$\underline{u} = u_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi u)};$$
$$\underline{i} = i_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi i)}. \tag{2.9}$$

Den Amateur interessiert nun besonders die Darstellung komplexer Widerstände.

Der komplexe Widerstand ist als Division der komplexen Spannung durch den komplexen Strom definiert

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{u_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi u)}}{i_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi i)}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi u - \varphi i)}$$
$$= |Z| e^{\pm j\varphi Z}. \tag{2.10}$$

Diese Größe, die zeitunabhängig ist, wird in der Literatur auch als Widerstandsoperator bezeichnet. Er kann, wie in Abschnitt 2.3.1. gezeigt, auch in der trigonometrischen Form

$$\underline{Z} = |Z| \cos \varphi_z + j |Z| \sin \varphi_z \tag{2.11}$$

und allgemeinen Form

$$\underline{Z} = R + jX \tag{2.12}$$

dargestellt werden.

Der Betrag des komplexen Widerstands ergibt sich analog der Gl. (2.2) zu

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \tag{2.13}$$

und der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung ist

$$\varphi_u - \varphi_i = \pm \varphi_z = \arctan \frac{X}{R}. \tag{2.14}$$

Für die 3 passiven Zweipole, Ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität, ergeben sich nun folgende Widerstandsoperatoren:

Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z}_R = R \cdot e^{j0} = R \tag{2.15}$$

Induktivität

$$\underline{Z}_L = \omega L \, e^{j90°} = j \, \omega \, L = jX_L \tag{2.16}$$

Kapazität

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j90°} = \frac{1}{j \, \omega \, C} = -jX_C \tag{2.17}$$

Die Widerstände setzen sich also aus den Beträgen

$$|\, Z_R \,| = R,$$

$$|\, Z_L \,| = \omega \, L,$$

$$|\, Z_C \,| = \frac{1}{\omega \, C}$$

und der Phase, auch Dreher genannt, zusammen. Sie sind somit, genau wie komplexe Zahlen, in der Gaußschen Zahlenebene darstellbar (Bild 2.7).

Die gleichen Betrachtungen ergeben sich bei den Leitwerten oder Leitwertoperatoren; es sind die reziproken Widerstandswerte.

So gilt für den ohmschen Leitwert

$$\underline{G}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{R} \, e^{j0} \, ; \tag{2.18}$$

für den induktiven Leitwert

$$\underline{G}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{j \, \omega \, L} e^{-j90°} = -j \, B; \tag{2.19}$$

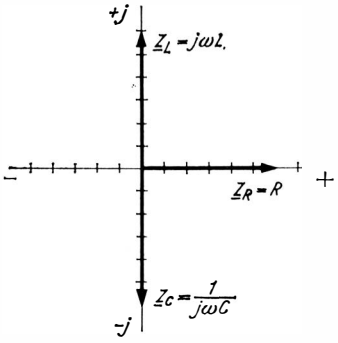


Bild 2.7
Darstellung komplexer Widerstände in der *Gaußschen* Zahlenebene

und für den kapazitiven Leitwert

$$\underline{G}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = j\,\omega\,C \cdot e^{j90°} = j\,B. \tag{2.20}$$

Die Beträge sind jetzt

$$|\,G_R\,| = \frac{1}{R},$$

$$|\,G_L\,| = \frac{1}{\omega\,L},$$

$$|\,G_C\,| = \omega\,C.$$

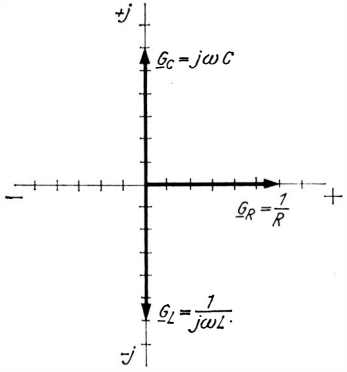


Bild 2.8
Darstellung der komplexen Leitwerte in der *Gaußschen* Zahlenebene

Bild 2.8 zeigt die Lage der Leitwerte in der *Gaußschen* Zahlenebene.

Der komplexe Leitwert setzt sich analog wie der komplexe Widerstand aus dem Realteil und Imaginärteil zusammen

$$\underline{G} = G \pm j\,B \tag{2.21}$$

oder

$$\underline{G} = |\,G\,| \cdot e^{\pm j\varphi_G}. \tag{2.22}$$

3. Grundbegriffe der Ortskurventheorie

Zum Verständnis der Ortskurventheorie und vor allem zum praktischen Konstruieren muß man bestimmte Grundbegriffe kennen.

3.1. Die Inversion

Unter diesem Begriff versteht man die Kehrwertbildung einer komplexen Größe. Der Kehrwert läßt sich sowohl in der bekannten rechnerischen Weise als auch auf zeichnerischem Wege bilden. Zum besseren Verständnis und zur Kontrolle der zeichnerischen Methode einige Hinweise zur rechnerischen Inversion.

3.1.1. Rechnerische Inversion eines Punktes

Es ist zweckmäßig, die Rechnung an einem Beispiel durchzuführen.

Beispiel 3.1

Gegeben sei ein komplexer Widerstand nach Bild 3.1

$$\underline{Z} = R + jX = (300 + j400)\,\Omega.$$

Gesucht wird der komplexe Leitwert $\underline{G}$.

Lösung

Die Rechnung ergibt für den Betrag von $\underline{Z}$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{9 \cdot 10^4 + 16 \cdot 10^4},$$

$$|Z| = \sqrt{25 \cdot 10^4} = 500\,\Omega.$$

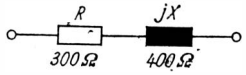


Bild 3.1
Schaltung zum Beispiel 3.

Der Phasenwinkel ist

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{400}{300} \quad \text{und} \quad \varphi = 53{,}2°.$$

Die Kehrwertbildung ergibt nun den Leitwert

$$\underline{G} = \frac{1}{|\,Z\,|\,e^{j\varphi\Omega}}$$

$$\underline{G} = \frac{1}{500}\, e^{-j53{,}2°} = 2 \cdot e^{-j53{,}2°}\ \text{mS}$$

in der Exponentialform.
Um den Leitwert in der allgemeinen Form $G = G \pm j\,B$ darzustellen, ist die Rechnung über die trigonometrische Form notwendig:

$$\underline{G} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-j53{,}2°}\ \text{S},$$
$$\underline{G} = 2 \cdot 10^{-3}\,(\cos 53{,}2° - j \sin 53{,}2°)\ \text{S},$$
$$\underline{G} = 2 \cdot 10^{-3}\,(0{,}6 - 0{,}8)\ \text{S},$$
$$\underline{G} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} - j\,1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{S},$$
$$\underline{G} = (1{,}2 - j\,1{,}6)\ \text{mS}.$$

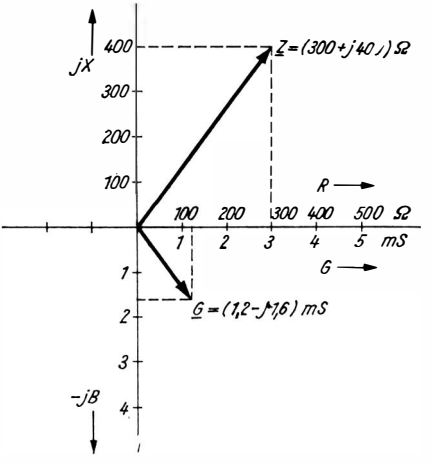


Bild 3.2 Darstellung des errechneten inversen Zeigers $\underline{G}$

Der Betrag des Leitwerts $\underline{G}$ ist gleich $\frac{1}{|Z|}$ und der Winkel gleich $-\varphi$. In der *Gaußschen* Zahlenebene liegt also der Zeiger $\underline{G}$, ebenso wie die konjugierte Zahl, spiegelbildlich zum Zeiger $\underline{Z}$. Das heißt, die Zeiger $\underline{Z}$ und $\underline{G}$ sind zueinander invers (invers $\triangleq$ umgekehrt).
Bild 3.2 zeigt die beiden Größen in der *Gaußschen* Zahlenebene.

3.1.2. Zeichnerische Inversion eines Punktes

Das Problem besteht darin, grafisch den Leitwert eines gegebenen komplexen Widerstands in der *Gaußschen* Zahlenebene zu ermitteln.
Die rechnerische Inversion zeigte, daß der invertierte Zeiger, d. h. der Leitwert, spiegelbildich zur reellen Achse liegt; das ergibt sich aus dem entgegengesetzten Argument. Den Winkel des zu suchenden Leitwerts erhält man also durch Spiegelung an der reellen Achse.
Wie wird aber die Länge des Zeigers, d. h. der Betrag $|\underline{G}|$ ermittelt? Wie noch gezeigt wird, ergibt sich die Länge des Zeigers $\underline{G}$ durch Spiegelung an einem sogenannten Inversionskreis. Das zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der Zeigerlänge nennt man die Polarenkonstruktion.
Die Polarenkonstruktion sei an Hand von Bild 3.3 erläutert und begründet.
Zunächst wird zum gegebenen Zeiger $\underline{Z}$ der konjugiert komplexe Zeiger $\overline{\underline{Z}}$ gezeichnet. Vom Zeigerendpunkt $\overline{\underline{Z}}$ werden 2 Tangenten an den Inversionskreis mit dem Radius $r = 1$ (Einheitskreis) gelegt und die beiden Berührungspunkte durch eine Gerade verbunden. Diese Gerade bezeichnet man als Polare in bezug auf den Punkt $\overline{\underline{Z}}$.
Der Schnittpunkt der Polare mit dem Zeiger $\overline{\underline{Z}}$ ist der Endpunkt des gesuchten inversen Zeigers $\underline{G}$ (Bild 3.3).
Die gezeigte Polarenkonstruktion läßt sich auch an einem Inversionskreis mit dem beliebigen Radius r_0 anwenden. In der Praxis ist wegen des Maßstabs selten ein Radius von $r = 1$ möglich.

Die Begründung für die Polarenkonstruktion liefert der von *Euklid* aufgestellte Kathetensatz. Nach diesem Kathetensatz ergibt sich die wichtige Beziehung

$$r \cdot r' = r_0^2 \tag{3.1}$$

oder

$$|Z| \cdot |G| = r_0^2 \tag{3.2}$$

entsprechend den Beziehungen in Bild 3.3.
Die Gl. (3.1) nennt man das Gesetz der reziproken Radien. Es wird vorteilhaft bei der Spiegelung von Kurven angewendet und stellt ein Grundgesetz der Ortskurventheorie dar. Ist, wie in Bild 3.3 allgemein angedeutet, der Radius des Inversionskreises $r_0 = 1$, so wird aus Gl. (3.2) der Betrag des Leitwerts

$$|G| = \frac{1}{|Z|}, \tag{3.3}$$

d. h., der Wert von G entspricht einer unmittelbaren Kehrwertbildung durch die Polarenkonstruktion und läßt sich sofort ablesen. Wie aber oben bereits angeführt, kann man r_0 von 1 praktisch selten realisieren. Bei einem $r_0 \neq 1$ ist die Strecke für den Leitwert entsprechend der Beziehung

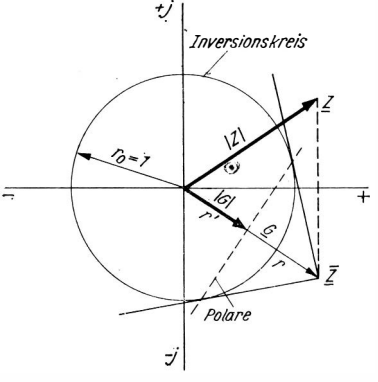


Bild 3.3
Polarenkonstruktion

$$|G| = \frac{1}{|Z|} \cdot r_o^2$$

um den Faktor r_o^2 vergrößert. Die Strecke von $|G|$ muß deshalb durch r_o^2 dividiert werden, um den wahren Wert von $|G|$ zu erhalten.

Dieses etwas umständliche Verfahren läßt sich umgehen, wenn man bei der Wahl der Maßstäbe für $\underline{Z}$ und $\underline{G}$ bereits den Einfluß von r_0 berücksichtigt. Dann stellt der durch die Inversion gefundene komplexe Leitwert unmittelbar den gesuchten Wert dar.

Den Inversionskreisradius r_0 ermittelt man nach der Beziehung

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{|Z|}{\text{cm}} \cdot \frac{|G|}{\text{cm}}}} \cdot \tag{3.4}$$

Das folgende Beispiel soll nun die neuen Erkenntnisse praktisch festigen. Zur Kontrolle mit der bereits durchgeführten rechnerischen Inversion in Abschnitt 3.1.1. verwendet man das gleiche Beispiel.

Beispiel 3.2

Gegeben sei ein komplexer Widerstand nach Bild 3.1

$$\underline{Z} = R + jX = (300 + j400)\,\Omega.$$

Gesucht ist auf zeichnerischem Wege der komplexe Leitwert $\underline{G}$.

Lösung

Dabei wird wie folgt vorgegangen:

— Wahl des Maßstabs für Widerstand und Leitwert;

— Errechnen des Inversionskreisradius r_0;

— Spiegelung des Punktes $\underline{Z}$ an der reellen Achse;

— Spiegelung des Punktes $\overline{Z}$ am Inversionskreis mit der Polarenkonstruktion.

Als Maßstab wählt man
für den Widerstand — 1 cm $\triangleq$ 100 Ω,
für den Leitwert — 1 cm $\triangleq$ 1 mS.
Mit Gl. (3.4) ergibt sich der Radius des Inversionskreises

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{100\,\Omega}{\text{cm}} \cdot \frac{1\,\text{mS}}{\text{cm}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{100\,\Omega \cdot 10^{-3}\text{S}}{\text{cm}^2}}}$$

$$r_0 = \frac{1\ \text{cm}}{\sqrt{10 \cdot 10^{-2}}} = \frac{1 \cdot 10^1\ \text{cm}}{3{,}16},$$

$$r_0 = 3{,}16\ \text{cm}.$$

Nun wird, wie in Bild 3.4 gezeigt, in die *Gaußsche* Zahlenebene der Inversionskreis mit $r_0 = 3{,}16$ cm und der Punkt $\underline{Z} = (300 + j400)\,\Omega$ eingezeichnet. Diesen Punkt spiegelt man an der reellen Achse und erhält $\underline{\bar{Z}}$. Von $\underline{\bar{Z}}$ aus entsteht die

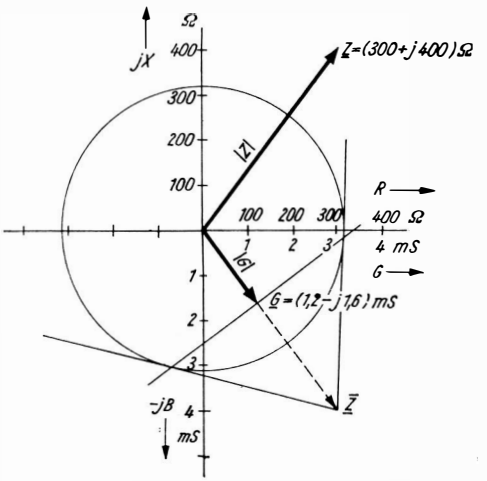


Bild 3.4 Ermittlung des Leitwerts $\underline{G}$ auf zeichnerischem Weg

Polarenkonstruktion und damit ist der Endpunkt des gesuchten Leitwerts $\underline{G}$ festgelegt.
Mit dem gewählten Leitwertmaßstab läßt sich aus Bild 3.4 unmittelbar der genaue Wert von $\underline{G}$ ablesen

$$\underline{G} = G + jB,$$

$$\underline{G} = (1{,}2 - j1{,}6)\ \text{mS}.$$

Auch der Betrag $|G|$ und der Winkel φ sind sofort abzumessen

$$|G| = 2\ \text{mS},$$

$$\varphi = -53°.$$

Hieraus ergibt sich die Exponentialform

$$\underline{G} = |G| \cdot e^{-j\varphi},$$

$$\underline{G} = 2 \cdot e^{-j53°}\ \text{mS}.$$

Ein Vergleich mit den errechneten Werten in Abschnitt 3.1.1. bestätigt die richtige Konstruktion. Im nächsten Beispiel wird die Polarenkonstruktion von „innen nach außen" gezeigt, d. h., der Endpunkt des gesuchten Zeigers liegt außerhalb des Inversionskreises.
Beispiel 3.3
Gegeben ist die Parallelschaltung nach Bild 3.5 mit den Werten

$$R = 1\ \text{k}\Omega;\ L = 0{,}1\ \text{H};\ f = 800\ \text{Hz}.$$

Gesucht wird auf grafischem Weg der Gesamtwiderstand der Schaltung.
Lösung
Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Einzelleitwerte. Man bestimmt also den Gesamtleitwert und konstruiert daraus durch Inversion den gesuchten Gesamtwiderstand.

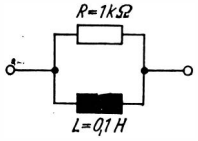


Bild 3.5
Schaltung zum Beispiel 3.3

Die beiden Einzelleitwerte sind

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{1\,k\Omega} = 1 \cdot 10^{-3}\,S = 1\,mS$$

und

$$\underline{G}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j2\pi 800 \cdot 0{,}1\,H} = \frac{1}{j\,5024 \cdot 0{,}1\,H}\,s$$

$$\underline{G}_L = -\,j1{,}98\,mS.$$

Als Maßstab gilt wieder:

für den Leitwert 1 cm $\triangleq$ 1 mS

für den Widerstand 1 cm $\triangleq$ 100 Ω.

Der Inversionskreisradius r_0 wird somit — wie in Beispiel 3.2 —

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{cm} \cdot \frac{G}{cm}}} = 3{,}16\ cm.$$

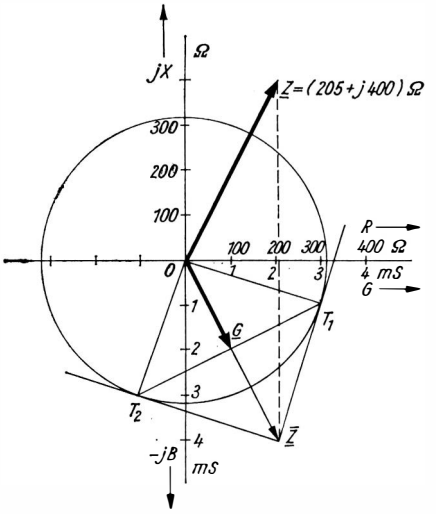


Bild 3.6 Umgekehrte Polarenkonstruktion nach Beispiel 3.3

Wie in Bild 3.6 dargestellt, teilt man das Achsenkreuz entsprechend dem gewählten Maßstab ein und zieht den Inversionskreis. Danach wird der Leitwert

$$\underline{G} = (1 - j1{,}98)\,\text{mS}$$

eingetragen.
Der Punkt $\underline{G}$ liegt innerhalb des Inversionskreises, also muß sich $\underline{Z}$ außerhalb des Inversionskreises befinden.
Die Polarenkonstruktion muß von innen nach außen durchgeführt werden. Dazu verlängert man die Strecke $\overline{OG}$ und fällt im Punkt $\underline{G}$ (Zeigerspitze) das Lot nach beiden Seiten, und zwar bis zum Schnittpunkt mit dem Inversionskreis. Diese Schnittpunkte sind mit dem Kreismittelpunkt durch 2 Hilfslinien zu verbinden. Nun errichtet man auf diesen Hilfslinien im Schnittpunkt mit dem Kreis ein weiteres Lot, bis die verlängerte Strecke $\overline{OG}$ geschnitten wird. Dieser Punkt ist der konjugierte Wert von $\underline{Z}$. Die beiden zuletzt errichteten Lote stellen gleichzeitig die Tangenten vom Punkt $\underline{Z}$ an den Kreis dar.
Nach Spiegelung von Punkt $\underline{Z}$ an der reellen Achse läßt sich aus Bild 3.6 der gesuchte komplexe Gesamtwiderstand sowohl in allgemeiner Form

$$\underline{Z} = (205 + j400)\,\Omega$$

als auch nach Betrag und Phase

$$\underline{Z} = 450\,e^{j68°}\,\Omega$$

entnehmen.
Die 2 Beispiele zeigten die zeichnerische Inversion von Punkten, d. h. von feststehenden Widerstandswerten bzw. Leitwerten. Es wäre übertrieben, wollte man behaupten, daß diese zeichnerische Methode wesentliche Vorteile oder Zeitersparnis gegenüber der rechnerischen bringt. Das ist bei solch einfachen Aufgaben nicht der Fall.
Vorteile bringt die geometrische Inversion erst, wenn ganze Kurven invertiert werden müssen. Der Weg über die punktweise mathematische Berechnung einer Leitwertortskurve aus einer gegebenen Widerstandsortskurve ist so zeitaufwendig,

daß man mit der zeichnerischen Inversion wesentlich schneller zum Ziel gelangt.

3.1.3. Zeichnerische Inversion von Kurven

Die beiden vorangegangenen Abschnitte beschäftigten sich mit der Inversion von Punkten und erklärten dabei das Einmaleins des Konstruierens von Ortskurven.
Wie erfolgt nun die Inversion von Kurven?

In der Ortskurventheorie interessiert, und das drückt schon die Bezeichnung aus, besonders die Kurvendarstellung bestimmter komplexer Größen in Abhängigkeit einer anderen Größe. Einfache Kurvenverläufe, wie Kreis oder Gerade brauchen nicht punktweise nach der Polarenkonstruktion invertiert werden. Liegen solche einfachen Kurven vor, lassen sich bestimmte Gesetzmäßigkeiten (Ortskurvensätze oder Inversionsgesetze) anwenden, die es gestatten, die Inversion in recht einfacher Weise durchzuführen.

Die 4 wichtigsten Ortskurvensätze sind, ohne sie mathematisch zu beweisen, im folgenden definiert.

1. Ortskurvensatz

Eine Gerade, die durch den Inversionsmittelpunkt geht, hat als inverse Kurve wieder eine Gerade, die durch den Mittelpunkt geht (Bild 3.7).

2. Ortskurvensatz

Eine Gerade, die nicht durch den Inversionsmittelpunkt geht, hat als inverse Kurve einen Kreis, der durch den Inversionsmittelpunkt geht (Bild 3.8).

3. Ortskurvensatz

Ein Kreis hat als inverse Kurve eine Gerade, wenn der Inversionsmittelpunkt auf dem Kreis liegt (Bild 3.9).

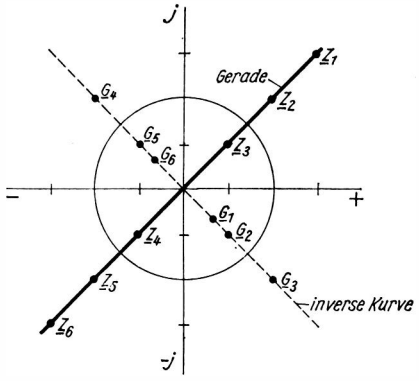


Bild 3.7 Zum 1. Ortskurvensatz

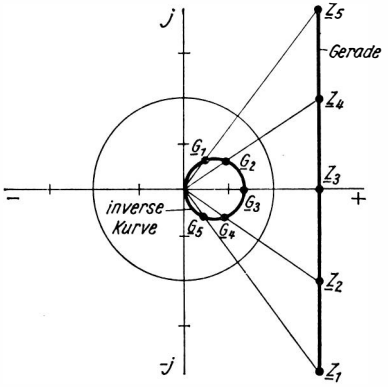


Bild 3.8 Zum 2. Ortskurvensatz

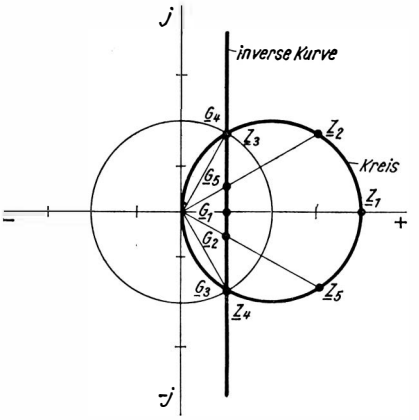


Bild 3.9 Zum 3. Ortskurvensatz

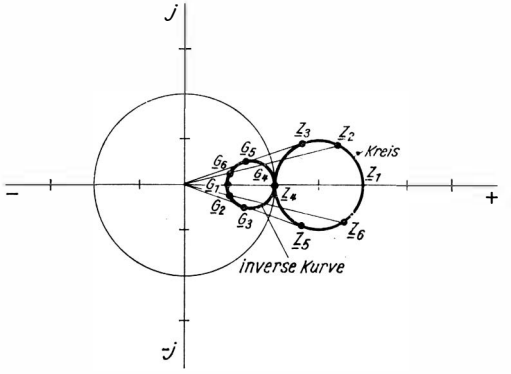


Bild 3.10 Zum 4. Ortskurvensatz

4. Ortskurvensatz

Ein Kreis, der nicht durch den Inversionsmittelpunkt geht, hat als inverse Kurve wieder einen Kreis (Bild 3.10).

Diese allgemein formulierten Gesetze werden bei der Behandlung der Widerstands- und Leitwertortskurven von einfachen Schaltungen bestätigt.

4. Ortskurven komplexer Widerstände und Leitwerte

In diesem Abschnitt werden die Ortskurven der Reihen- und Parallelschaltungen von R, L und C gezeigt und dabei die bekannten Ortskurvensätze angewendet. Ortskurven entstehen immer dann, wenn eine Größe in Abhängigkeit einer anderen Veränderlichen dargestellt wird. Diese Veränderliche kann entweder die Frequenz oder der Wert eines Schaltelements sein.

4.1. Ortskurven bei konstanter Frequenz und variablen Schaltelementen

4.1.1. Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Gegeben ist die Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstands mit einer Induktivität nach Bild 4.1. Es interessiert die Ortskurve des komplexen Gesamtwiderstands $\underline{Z} = R + j\omega L$, wenn sich der Wert des Ohmschen Widerstands zwischen 0 und ∞ ändert. Bild 4.1 zeigt die Ortskurve. Der Verlauf dieser Ortskurve als Gerade ergibt sich, weil der Widerstand der Spule und somit der Abstand zwischen der reellen Achse und der Ortskurve des Gesamtwiderstands konstant bleiben. Je nach Größe des Ohmschen Widerstands ändert sich der Gesamtwiderstand und natürlich auch der Phasenwinkel, der sich aus der Beziehung

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R} \tag{4.1}$$

ergibt.

Einige Werte von $\underline{Z}$ sind zum besseren Verständnis in Bild 4.1 eingetragen.

Wie sieht nun die Ortskurve des komplexen Leitwerts dieser Schaltung aus?

Hier läßt sich der 2. Ortskurvensatz anwenden. Die Wider-

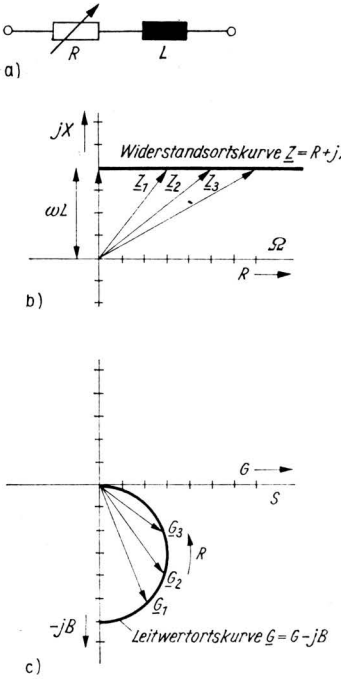


Bild 4.1
Ortskurven der Reihenschaltung R und L; a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Widerstands, c — Ortskurve des komplexen Leitwerts

standsortskurve ist eine Gerade, und bei der Inversion entsteht der Leitwertkreis, der durch den Ursprung geht (Bild 4.1).

Daß der Leitwertkreis im IV. Quadranten liegt, ergibt sich aus der Inversion von feststehenden Widerstandswerten, d. h. von Punkten. Es wäre ja möglich, die Widerstandsortskurve punktweise zu invertieren, auch dann erhält man den gleichen Leitwertkreis.

Es ist noch zu beachten, daß der Leitwert gegen 0 geht, wenn der Widerstandswert unendlich groß wird, d. h., der Leitwert ist somit im Koordinatenursprung gleich 0.

Wie die genaue Berechnung erfolgt und wie die Maßstäbe festzulegen sind, zeigen später die praktischen Beispiele.

4.1.2. Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

Bild 4.2 zeigt die Ortskurve des komplexen Widerstands der Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität. Sie liegt jetzt unterhalb der reellen Achse, und der Abstand zwischen reeller Achse und Widerstandsortskurve wird bestimmt durch die Größe des kapazitiven Widerstands $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

Analog der Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität ergibt sich als Leitwertortskurve wieder ein Kreis, der aber jetzt im I. Quadranten liegt (Bild 4.2).

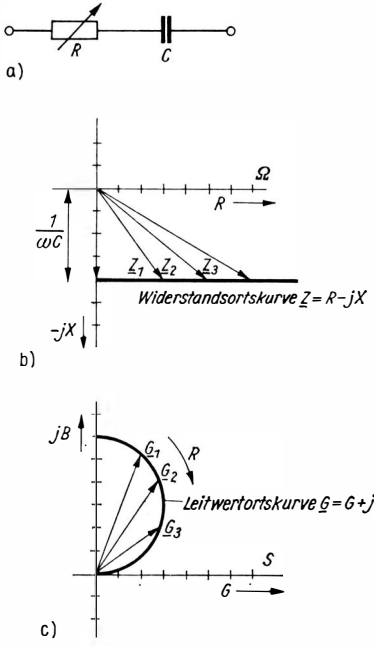


Bild 4.2
Ortskurven der Reihenschaltung aus R und C; a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Widerstands, c — Ortskurve des komplexen Leitwerts

4.1.3. Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität

Bei den Parallelschaltungen ist es zweckmäßig, stets von den Leitwerten auszugehen, da sich die Leitwerte einer Parallelschaltung addieren. Der komplexe Leitwert der Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität ist

$$\underline{G} = G - jB,$$

d. h., die Leitwertortskurve ist eine Gerade, die unterhalb der reellen Achse liegt. Als Widerstandsortskurve erhält man nach dem 2. Ortskurvensatz einen Kreis, der sich oberhalb der reellen Achse befindet. Es liegen also analoge Verhältnisse, wie bei der Reihenschaltung von R und C, vor. Bild 4.3 zeigt die beiden Ortskurven dieser Schaltung.

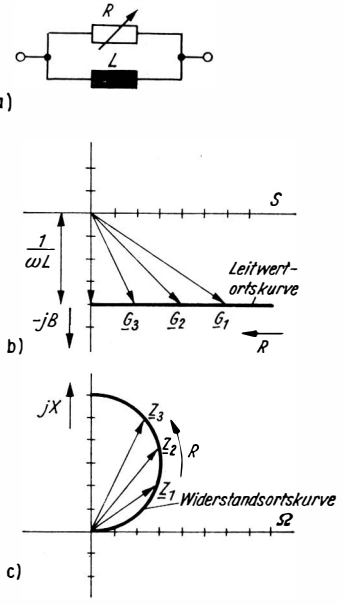


Bild 4.3
Ortskurven der Parallelschaltung aus R und L; a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Leitwerts, c — Ortskurve des komplexen Widerstands

4.1.4. Parallelschaltung von Widerstand und Kapazität

Auch bei dieser Schaltung zeichnet man zuerst die Leitwertortskurve und ermittelt daraus die Widerstandsortskurve. Es ergeben sich analoge Verhältnisse wie bei der Reihenschaltung von R und L. Die Ortskurven sind in Bild 4.4 dargestellt.

4.2. Ortskurven bei variabler Frequenz und konstanten Schaltelementen

Es soll nun untersucht werden, was sich für Ortskurven der komplexen Widerstände und Leitwerte ergeben, wenn man die

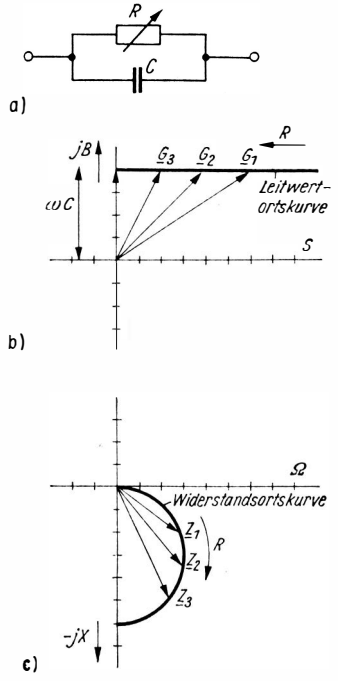


Bild 4.4
Ortskurven der Parallelschaltung aus R und C;
a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Leitwerts,
c — Ortskurve des komplexen Widerstands

an die Schaltung gelegte Frequenz ändert. Dabei ändert sich nur der Wert des frequenzabhängigen Schaltelements, d. h. X_L oder X_C. Der Ohmsche Widerstand bleibt konstant.

4.2.1. Reihenschaltung von Widerstand und Induktivität

Gegeben ist die Schaltung nach Bild 4.5. Die Frequenz ändert sich von 0 bis ∞.
Man konstruiert so, daß zuerst der Wert des Ohmschen Widerstands R auf der reellen Achse aufgetragen und anschließend die Gerade für den imaginären Widerstand $j\omega L$ bzw. jX nach oben angetragen wird. Das ist auch logisch, denn mit steigender Frequenz ist auch der Widerstand der Induktivität immer

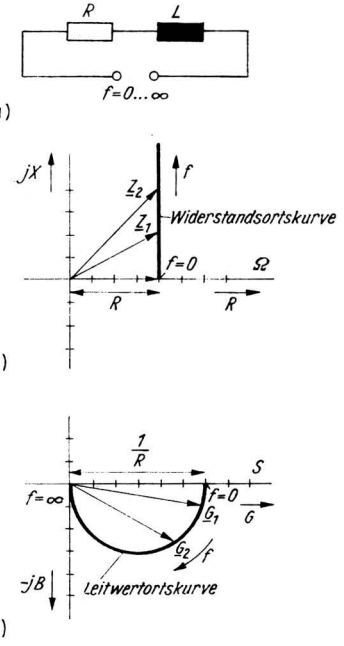


Bild 4.5
Ortskurven der Reihenschaltung aus R und L bei veränderlicher Frequenz;
a — Schaltung,
b — Ortskurve des komplexen Widerstands, c — Ortskurve des komplexen Leitwerts

größer. Die Gerade ist die Ortskurve des komplexen Widerstands $\underline{Z} = R + j\omega L$ (Bild 4.5). Die Konstruktion des komplexen Leitwerts erfolgt wieder nach dem 2. Ortskurvensatz, d. h., die invertierte Kurve ergibt einen Kreis, der durch den Nullpunkt geht.

4.2.2. Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität

Nach Bild 4.6 ergibt sich als Widerstandsortskurve eine Gerade, die man nach unten abträgt. Dabei ist zu beachten, daß sich mit steigender Frequenz der Wert $-j\,\frac{1}{\omega C}$ immer

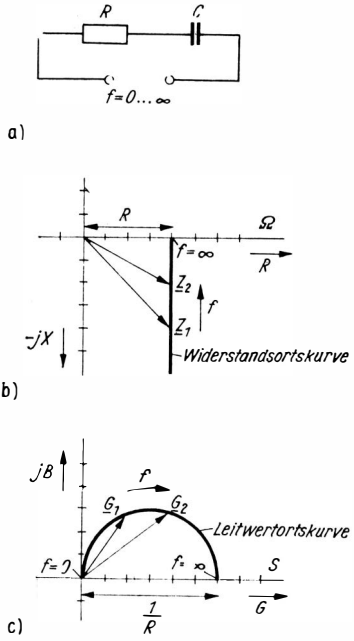


Bild 4.6
Ortskurven der Reihenschaltung aus R und C bei veränderlicher Frequenz; a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Widerstands, c — Ortskurve des komplexen Leitwerts

mehr verkleinert, d. h., bei unendlich großer Frequenz wird der komplexe Widerstand $\underline{Z} = R$, also reell.
Als Leitwertortskurve ergibt sich ein Kreis, der oberhalb der reellen Achse liegt (Bild 4.6).

4.2.3. Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität

Wie in Abschnitt 4.1.3. erläutert, geht man wieder von den Leitwerten aus. Als Leitwertortskurve ergibt sich eine Gerade, die unterhalb der reellen Achse liegt, da sich der komplexe Leitwert aus

$$\underline{G} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$

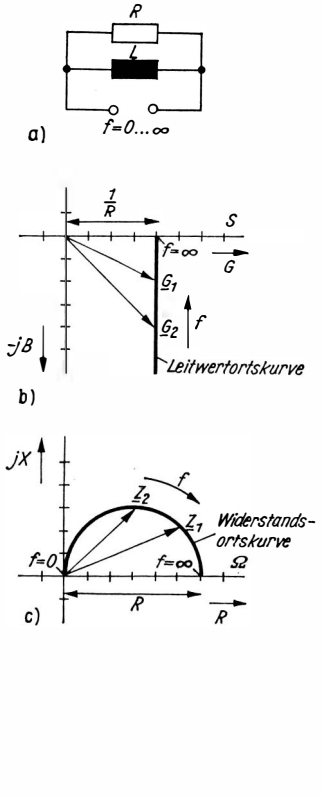


Bild 4.7
Ortskurven der Parallelschaltung aus R und L bei veränderlicher Frequenz;
a — Schaltung,
b — Ortskurve des komplexen Leitwerts,
c — Ortskurve des komplexen Widerstands

zusammensetzt. Der imaginäre Ausdruck wird bei unendlich großer Frequenz zu 0.
Die Widerstandsortskurve ist wieder ein Kreis (Bild 4.7).

4.2.4. Parallelschaltung von Widerstand und Kapazität

Auch in diesem Fall erhält man als Leitwertortskurve eine Gerade, die sich aber wegen

$$\underline{G} = \frac{1}{R} + j\omega C$$

oberhalb der reellen Achse befindet. Die Widerstandsortskurve

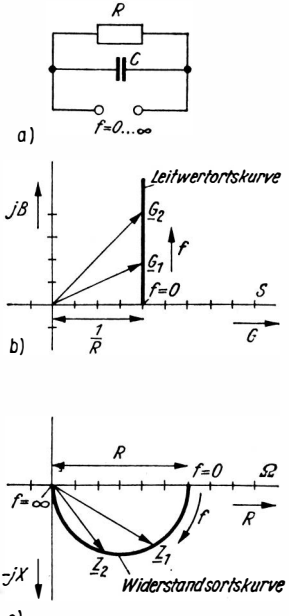


Bild 4.8
Ortskurven der Parallelschaltung aus R und L bei veränderlicher Frequenz;
a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Leitwerts,
c — Ortskurve des komplexen Widerstands

ist deshalb ein Kreis, der unterhalb der reellen Achse liegt (Bild 4.8).

4.3. Ortskurven des Reihenresonanzkreises

Der Reihenresonanzkreis nach Bild 4.9 besteht aus der Reihenschaltung von R, L und C. Die Ortskurven dieser Schaltung sind eine Aneinanderreihung der Ortskurven der Reihenschaltung von R und L sowie R und C.
Entsprechend der bekannten Beziehung für den Reihenkreis

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{4.2}$$

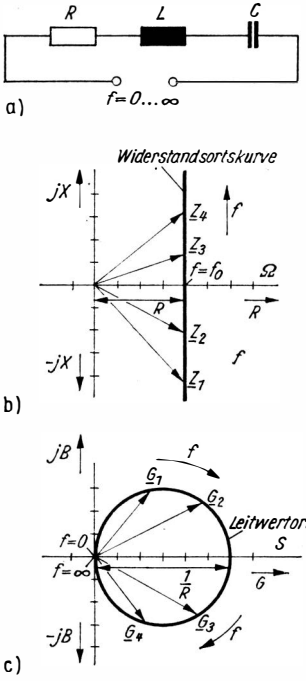


Bild 4.9
Ortskurven des Reihenresonanzkreises;
a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Widerstands, c — Ortskurve des komplexen Leitwerts

ergibt sich als Widerstandsortskurve eine Gerade, die im Abstand R parallel zur imaginären Achse verläuft. Wie ist aber die Frequenzverteilung auf dieser Geraden? Dabei seien 3 Extremwerte betrachtet:

— Frequenz $f = 0$

In diesem Fall ist $\omega L = 0$ und $-\frac{1}{\omega C} = -\infty$.

Der Wert für $\underline{Z}$ beginnt also bei $-\infty$.

— Frequenz $f = f_0$

Bei der Resonanzfrequenz wird der Ausdruck

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0.$$

Es ist nur noch der Ohmsche Widerstand wirksam, d. h., die Frequenz f_0 liegt genau auf der reellen Achse.

— Frequenz $f = \infty$

Jetzt wird der Ausdruck $\frac{1}{\omega C}$ gleich 0 und ωL sowie damit auch $\underline{Z}$ unendlich groß.

Die Leitwertortskurve setzt sich aus 2 Halbkreisen zu einem vollständigen Kreis zusammen. Der Durchmesser des Kreises hat den Wert $\frac{1}{R}$ (Bild 4.9).

4.4. Ortskurven des Parallelresonanzkreises

Ausgehend vom Leitwert dieser Schaltung

$$\underline{G} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right), \tag{4.3}$$

erhält man als Leitwertortskurve eine Gerade und als Widerstandsortskurve einen vollständigen Kreis. Es treten die analogen Verhältnisse wie beim Reihenkreis auf, nur daß hier die beiden Ortskurven vertauscht sind. Die Kurven sind in Bild 4.10 dargestellt.

4.5. Beispiele einfacher Ortskurven

Aus der Darstellung der Widerstands- und Leitwertortskurven einfacher Schaltungen läßt sich bereits ableiten, wie wichtig und zweckmäßig die Kenntnisse der Ortskurvensätze sind, wenn qualitativ der Verlauf der Ortskurven solcher Schaltungen aufgezeigt werden soll.

Die Praxis beweist, daß es bei der Beurteilung des Verhaltens einer Schaltung gar nicht so sehr auf den genauen Wert ankommt. Oft genügt der qualitative Verlauf, und der wird durch die allgemeine Darstellung der Ortskurven gegeben. Un-

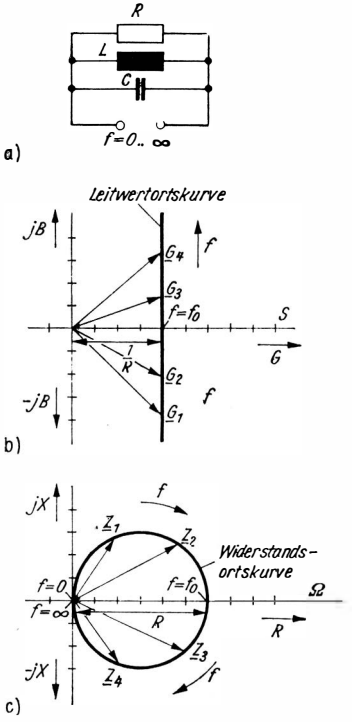


Bild 4.10
Ortskurven des Parallelresonanzkreises; a — Schaltung, b — Ortskurve des komplexen Leitwerts, c — Ortskurve des komplexen Widerstands

abhängig von der gewählten Frequenz oder den Werten der Schaltelemente erhält man also im Prinzip stets den gleichen Ortskurvenverlauf.
Unterschiedlich sind nur die Abstände von der reellen oder imaginären Achse, die Kreisdurchmesser und die Frequenz- oder Werteeinteilung auf den Ortskurven. Das alles ist ja abhängig vom gewählten Maßstab. Einige Beispiele sollen die maßstabsgerechte Konstruktion von Ortskurven zeigen. Mit Hilfe der Ortskurvensätze erspart man sich das umständliche Invertieren.

Beispiel 4.1

Gegeben ist die Reihenschaltung nach Bild 4.11 von Widerstand und Induktivität mit den Werten $R = 0$ bis 1 kΩ und $L = 0{,}2$ H. Die Frequenz beträgt $f = 1$ kHz.

Gesucht werden die maßstabsgerechten Widerstands- und Leitwertortskurven.

Lösung

Der prinzipielle Verlauf der beiden Ortskurven aus Bild 4.1 ist bereits bekannt und man braucht deshalb nicht mehr zu invertieren. Es fehlt lediglich noch die genaue Maßstabsangabe auf den beiden Kurven.

— Berechnen des induktiven Widerstands ωL

$$\omega L = 2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{s} \cdot 0{,}2\ \mathrm{H} = 1{,}256 \cdot 10^3\,\Omega = 1{,}256\ \mathrm{k}\Omega;$$

— Festlegen des Widerstandsmaßstabs

$$1\ \mathrm{cm} \mathrel{\hat{=}} 400\,\Omega;$$

— Zeichnen der Widerstandsortskurve (Bild 4.11);
— Wahl des Leitwertmaßstabs und Bestimmen des Durchmessers des Leitwertkreises.

Dabei muß man folgendes beachten:

Der komplexe Widerstand der gegebenen Schaltung sei

$$\underline{Z} = R + j\omega L.$$

Der komplexe Leitwert ist somit

$$\underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} .$$

Dieser Leitwert wird dann am größten, wenn der veränderliche Ohmsche Widerstand am kleinsten ist, d. h., wenn R gegen 0 geht. Mit R = 0 beträgt der Leitwert

$$\underline{G} = \frac{1}{0 + j\omega L} = -\,j\frac{1}{\omega L} = -\,j\frac{1}{1{,}256\ k\Omega}$$

$$\underline{G} = -\,j796\ \mu S.$$

Das ist zugleich der Wert für den Kreisdurchmesser. Der Mittelpunkt des Kreises liegt somit bei

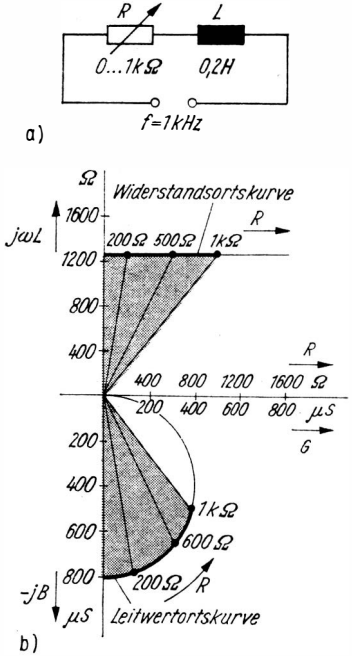


Bild 4.11
Ortskurven zum Beispiel 4.1;
a — Schaltung, b — Widerstands- und Leitwertsortskurven bei variablen R von 0 bis 1 kΩ

$$\frac{796\,\mu S}{2} = 398\,\mu S.$$

Als Leitwertmaßstab wählt man

$$1\text{ cm} \triangleq 200\,\mu S.$$

— Zeichnen des Leitwertkreises (Bild 4.11)
— Festlegen der Teilung auf beiden Ortskurven.
Die Teilung auf der Widerstandsortskurve ist linear und ergibt sich aus den festgelegten R-Werten.
Dagegen ist die Einteilung auf dem Leitwertkreis wegen $\frac{1}{\omega L}$ nicht linear.
Man erhält die Punkte auf dem Leitwertkreis für die einzelnen Widerstandswerte durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse. In Bild 4.11 sind die Winkel für die Widerstandswerte 200 Ω, 600 Ω und 1 kΩ gespiegelt.

Für jeden beliebigen Wert von R zwischen 0 Ω und 1 kΩ lassen sich sofort direkt die entsprechenden komplexen Widerstände und Leitwerte ablesen.

Zur Kontrolle wird der Leitwert auf rechnerischem Weg ermittelt, der sich bei R = 1 kΩ ergibt, und dieser dann mit der Zeichnung verglichen.

Der komplexe Widerstand ist

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (1 + 1{,}256)\,k\Omega.$$

Somit ergibt sich der Leitwert:

$$\underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 \cdot (R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)},$$

$$\underline{G} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\,\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\underline{G} = \frac{1 \cdot 10^3\,\Omega}{(1 \cdot 10^6 + 1{,}58 \cdot 10^6)\,\Omega^2} - j\,\frac{1{,}256 \cdot 10^3\,\Omega}{(1 \cdot 10^6 + 1{,}58 \cdot 10^6)\Omega^2},$$

$$\underline{G} = 388\,\mu S - j487\,\mu S.$$

Dieser Wert läßt sich mit hinreichender Genauigkeit auch in Bild 4.11 ablesen.
Unter Berücksichtigung des gewählten Maßstabs kann man sofort den Betrag | G | des Leitwerts oder den Betrag | Z | des Widerstands und die dazugehörigen Phasenwinkel ablesen. So wird z. B. in Bild 4.11 im Leitwertkreis für die Strecke vom Koordinatenursprung zum Punkt 1 kΩ ein Wert von 3,1 cm gemessen. Mit dem Leitwertmaßstab von 1 cm $\triangleq$ 200 μS erhält man für den Betrag

$$200\ \mu\text{S} \cdot 3{,}1 = 620\ \mu\text{S}.$$

Der Winkel φ beträgt 51°.
Somit läßt sich der Leitwert für R = 1 kΩ auch in der Exponentialform darstellen

$$\underline{G} = G \cdot e^{j\varphi};$$

$$\underline{G} = 620 \cdot e^{j51°}\ \mu\text{S}.$$

Beispiel 4.2

Gegeben ist eine Parallelschaltung von R und C nach Bild 4.12 mit den Werten R = 400 Ω und C = 5000 pF. Die Frequenz ändert sich von f = 0 bis 50 kHz.
Gesucht werden die maßstabsgerechten Widerstands- und Leitwertortskurven.
Lösung

Den prinzipiellen Verlauf der Ortskurven kann man wieder dem Bild 4.8 entnehmen. Zum besseren Verständnis sollte die Konstruktion wieder schrittweise durchgeführt werden.

— Zeichnen der Leitwertortskurve, da man bei einer Parallelschaltung stets von den Leitwerten ausgeht. Es ergibt sich eine Gerade. Der Abstand zwischen imaginärer Achse und Leitwertortskurve wird durch G festgelegt und beträgt

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{400\ \Omega} = 0{,}0025\ \text{S} = 2{,}5\ \text{mS}.$$

Die Teilung auf der Leitwertortskurve erfolgt linear. Die obere Begrenzung entsteht bei der Frequenz von f = 50 kHz, hier ist der Leitwert

$$jG_C = j\omega C = j2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 5000 \cdot 10^{-12}\ S,$$

$$jG_C = j6{,}28 \cdot 25 \cdot 10^{-5}\ S,$$

$$jG_C = j1{,}57\ mS.$$

— Der Maßstab des Leitwerts beträgt

$$1\ cm \triangleq 0{,}5\ mS.$$

Da sich mit diesem Maßstab bei der Frequenz $f = 50$ kHz eine Leitwertstrecke von $2 \cdot 1{,}57$ mS $\triangleq$ 31,4 mm ergibt, beträgt die Strecke für eine Einheit von 10 kHz jeweils

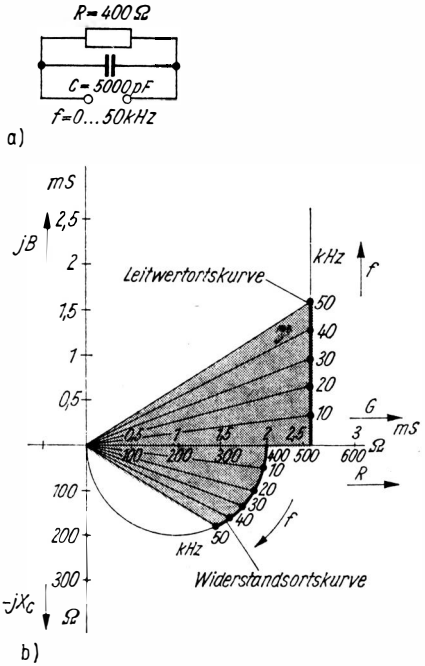


Bild 4.12 Ortskurven zum Beispiel 4.2; a — Schaltung, b — Widerstands- und Leitwertortskurven bei variabler Frequenz

$\frac{31{,}4\text{ mm}}{5} = 6{,}28\text{ mm}$, d. h., die Frequenzteilung auf der Leitwertkurve ist linear.

— Festlegen des Kreisdurchmessers der Widerstandsortkurve und Wahl des Widerstandsmaßstabs.
Der Kreisdurchmesser ergibt sich aus $R = 400\,\Omega$. Der Kreismittelpunkt liegt also bei $R = \frac{400\,\Omega}{2} = 200\,\Omega$.
Als Widerstandsmaßstab wird 1 cm $\triangleq$ 100 Ω gewählt.

— Zeichnen der Widerstandsortskurve (Bild 4.12).

— Anbringen der Teilung auf der Widerstandsortskurve. Sie erfolgt wieder durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse.

Die beiden Ortskurven sind in Bild 4.12 dargestellt.
Auch an diesem Beispiel läßt sich der Vorteil der Ortskurvendarstellung erkennen, da man sofort die Widerstandswerte bei einzelnen Frequenzen getrennt nach Real- und Imaginärteil oder nach Betrag und Phase ablesen kann. Gegenüber der Rechnung ergibt sich eine wesentliche Zeitersparnis. Soll der komplexe Widerstand für z. B. f = 50 kHz errechnet werden, so ist folgender Rechenaufwand für die Parallelschaltung erforderlich:

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-j\frac{R}{\omega C}\left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)}{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\left(R + j\frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\underline{Z} = \frac{-j\frac{R^2}{\omega C} + \frac{R}{(\omega C)^2}}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}},$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{R}{(\omega C)^2}}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} - j\frac{\frac{R^2}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}.$$

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich

$$\underline{Z} = \frac{400 \cdot 40{,}5 \cdot 10^4}{56{,}5 \cdot 10^4} - \mathrm{j}\frac{16 \cdot 10^4 \cdot 6{,}37 \cdot 10^2}{56{,}5 \cdot 10^4};$$

$$\underline{Z} = (287 - \mathrm{j}180)\,\Omega.$$

Mit der zeichnerischen Ermittlung kommt man wesentlich schneller zum Ziele.

Beispiel 4.3
Gegeben ist die Reihenschaltung aus R und C nach Bild 4.13

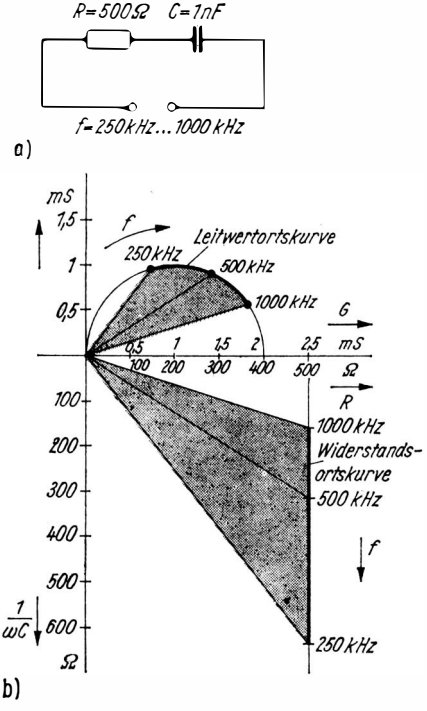


Bild 4.13 Ortskurven zum Beispiel 4.3; a — Schaltung, b — Widerstands- und Leitwertortskurven bei variabler Frequenz

mit den Werten $R = 500\,\Omega$ und $C = 1$ nF. Die Frequenz wird von $f = 250$ kHz bis 1000 kHz geändert.
Gesucht werden die maßstabsgerechten Ortskurven für Widerstand und Leitwert.

Lösung

Den prinzipiellen Verlauf der Ortskurven zeigt Bild 4.6. Die Konstruktion erfolgt schrittweise.

— Zeichnen der Widerstandsortskurve (Bild 4.13).
Der Abstand von der imaginären Achse ist gegeben durch $R = 500\,\Omega$. Entsprechend der Beziehung für den komplexen Widerstand $\underline{Z} = R - j\dfrac{1}{\omega C}$ beginnt die Widerstandsortskurve bei der Frequenz $f = 250$ kHz mit dem Imaginärteil

$$-j\frac{1}{\omega C} = \frac{1\,\Omega}{6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4} = 637\,\Omega.$$

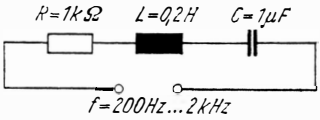
Das ist der untere Grenzwert.
Bei der Frequenz $f = 1000$ kHz ergibt sich der obere Grenzwert

$$-j\frac{1}{\omega C} = \frac{1\,\Omega}{6{,}28 \cdot 1000 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9}} = 159\,\Omega.$$

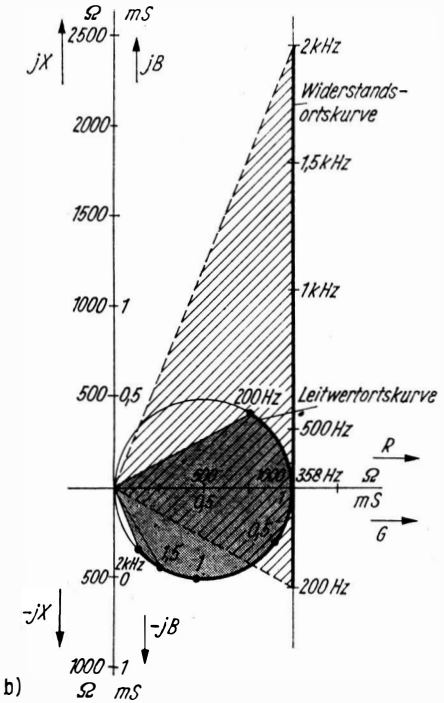
— Festlegen des Widerstandsmaßstabs. Man wählt
1 cm $\triangleq$ 100 Ω.
— Teilung auf der Widerstandsortskurve.
Wegen des Ausdrucks $\dfrac{1}{\omega C}$ entsteht keine lineare Teilung auf der Widerstandsgeraden. Es wird deshalb erforderlich, einige Werte dieses Ausdrucks zu berechnen. Bild 4.13 zeigt die Ergebnisse für die Frequenzen 250 kHz, 500 kHz und 1000 kHz.
— Zeichnen der Leitwertortskurve (Bild 4.13).
Die Leitwertortskurve ist ein Kreis oberhalb der reellen Achse. Der Kreisdurchmesser ergibt sich aus

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5000\,\Omega} = 2\,\text{mS}.$$

Als Leitwertmaßstab wird 1 cm $\triangleq$ 0,5 mS gewählt. Die Teilung auf dem Leitwertkreis erhält man wieder durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse. Die beiden



a)



b)

Bild 4.14 Ortskurven zum Beispiel 4.4; a — Schaltung, b — Widerstands- und Leitwertortskurven bei variabler Frequenz

Ortskurven sind in Bild 4.13 dargestellt. Der Bereich von 250 kHz bis 1000 kHz wurde besonders markiert.

Beispiel 4.4

Gegeben ist ein Reihenresonanzkreis nach Bild 4.14 mit den Werten $R = 1\,k\Omega$, $L = 0{,}2\,H$ und $C = 1\,\mu F$. Die Frequenz ändert sich von 200 Hz bis 2 kHz.

Gesucht werden die Ortskurven für Widerstand und Leitwert.

Lösung

Aus Bild 4.9 ersieht man den prinzipiellen Verlauf der Ortskurven für den Reihenkreis.

— Zeichnen der Widerstandsortskurve (Bild 4.14).
Sie verläuft im Abstand $R = 1\,k\Omega$ von der imaginären Achse. Die Grenzwerte sind durch die Frequenzen $f = 200\,Hz$ (untere Grenze) und $f = 2\,kHz$ (obere Grenze) bestimmt. Für diese beiden Frequenzen benötigt man die Widerstandswerte.

Für $f = 200$ Hz ist

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

$$\underline{Z} = 1\,k\Omega + j\left(6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} - \frac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}\right)\Omega,$$

$$\underline{Z} = (1000 - j543{,}8)\,\Omega.$$

und für $f = 2\,kHz$ ergibt sich

$$\underline{Z} = (1000 + j2432{,}5)\,\Omega.$$

Als Widerstandsmaßstab wählt man 1 cm $\triangleq 250\,\Omega$. Somit läßt sich die Widerstandsgerade maßstabsgerecht zeichnen.

— Zeichnen des Leitwertkreises (Bild 4.14).
Den Kreisdurchmesser bestimmt

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{1 \cdot 10^3\,\Omega} = 1\,mS.$$

Der Kreismittelpunkt liegt bei

$$\frac{1\ \text{mS}}{2} = 0{,}5\ \text{mS}.$$

Mit dem Leitwertmaßstab 1 cm $\triangleq$ 0,25 mS kann der Leitwertkreis gezeichnet werden.

— Frequenzteilung auf den Ortskurven.

Da auf der Widerstandsortskurve wegen des Ausdrucks $\frac{1}{\omega C}$ keine lineare Teilung möglich ist, errechnet man nach der Beziehung

$$jX = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

einige Werte für den Blindwiderstand. In Bild 4.14 sind die Werte für die Frequenzen 200 Hz, 500 Hz, 1 kHz, 1,5 kHz und 2 kHz eingezeichnet. Die Resonanzfrequenz

$$f_r = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

beträgt 358 Hz.

Die Teilung auf der Leitwertortskurve erhält man wieder durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse.

Die Ortskurven für dieses Beispiel sind in Bild 4.14 dargestellt.

Beispiel 4.5

Gegeben ist ein Parallelresonanzkreis nach Bild 4.15 mit den Werten $R = 1\ k\Omega$, $L = 0{,}2$ H und $C = 1\ \mu F$. Die Frequenz ändert sich zwischen 200 Hz und 1 kHz.
Gesucht wird die Widerstands- und Leitwertortskurve.

Lösung

Entsprechend dem prinzipiellen Verlauf der Ortskurven für diese Schaltung nach Bild 4.10 zeichnet man zuerst, da eine

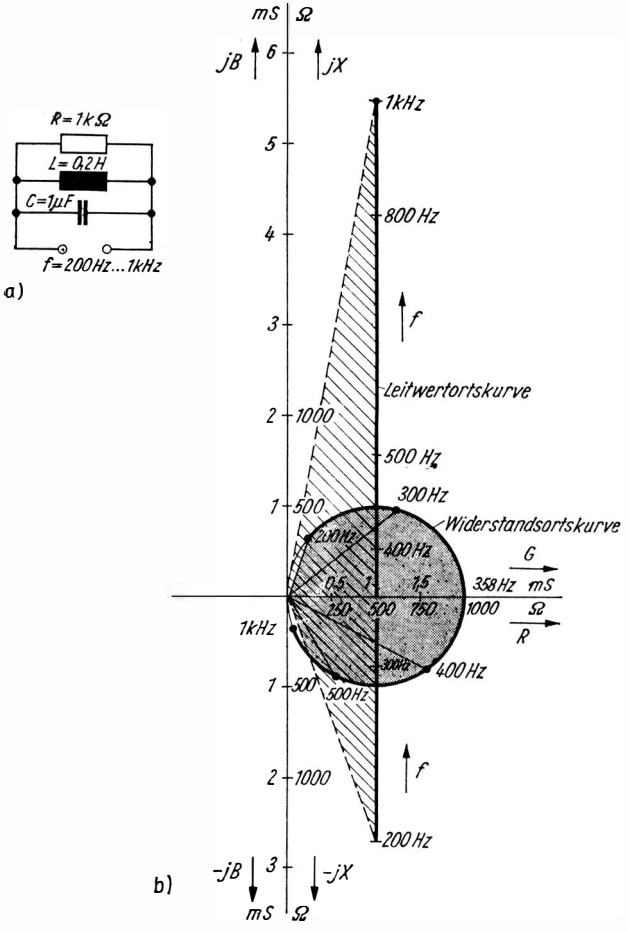


Bild 4.15 Ortskurven zum Beispiel 4.5; a — Schaltung, b — Widerstands- und Leitwertortskurven bei variabler Frequenz

Parallelschaltung vorliegt, die Leitwertgerade. Sie liegt im Abstand

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{1\,k\Omega} = 1\,mS$$

von der imaginären Achse.
Die Begrenzungen der Leitwertortskurve sind durch die Frequenzen 200 Hz (untere Grenze) und 1 kHz (obere Grenze) gegeben. Diese beiden Grenzwerte werden nach Gl. (4.3) für den Leitwert des Parallelresonanzkreises errechnet.
Man erhält für f = 220 Hz

$$\underline{G} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right),$$

$$\underline{G} = \frac{1\,S}{1 \cdot 10^3} + j\left(6{,}28 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^2 - \frac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}\,S\right),$$

$$\underline{G} = (1 - j2{,}734)\,mS;$$

und für f = 1 kHz

$$G = (1 + j5{,}484)\,mS.$$

Der Leitwertmaßstab ist 1 cm $\triangleq$ 0,5 mS.
Da wegen des Ausdrucks $\frac{1}{\omega L}$ keine lineare Teilung vorliegt, wird es notwendig, für einige Frequenzen die Werte für jB auszurechnen. Bild 4.15 zeigt diese für die Frequenzen 200 Hz, 500 Hz, 800 Hz und 1 kHz bereits. Nun zeichnet man die Widerstandsortskurve. Nach Bild 4.10 ist es ein vollständiger Kreis, wenn die Frequenz von 0 bis ∞ geht. Im Beispiel wird die Ortskurve jedoch durch die beiden Frequenzen f = 200 Hz und f = 1 kHz begrenzt; als Ortskurve entsteht nur ein Kreisbogen.
Der Widerstandsmaßstab sei 1 cm $\triangleq$ 500 Ω.
Zur Teilung auf dem Widerstandskreis wird wieder der Winkel an der reellen Achse gespiegelt.
Bild 4.15 zeigt beide Ortskurven.

4.6. Prinzipdarstellung von Ortskurven einiger Grundschaltungen

Die bisherigen Abschnitte behandelten Ortskurven von Grundschaltungen, die stets eine Gerade oder einen Kreis bzw. Halbkreis ergaben. Dabei ließen sich bestimmte Analogien zwischen den einzelnen Schaltungen erkennen.
Zum besseren Verständnis und zum Erlangen eines besseren Überblicks ist deshalb in Bild 4.16 nochmals der prinzipielle Verlauf der Ortskurven aller bisher behandelten Schaltungen zusammenfassend dargestellt.

4.7. Ortskurven zusammengesetzter Schaltungen

Bisher traten bei den betrachteten Schaltungen einfache Ortskurven auf, die sich mit Lineal und Zirkel konstruieren ließen. Durch die Anwendung der Ortskurvensätze ist sogar das Invertieren entfallen.
Solche einfachen Ortskurven treten bei komplizierten Schaltungen nicht mehr auf, sondern es entstehen Kurven, die punktweise konstruiert werden müssen.
Die genaue Konstruktion dieser Ortskurven erläutern nachstehend einige Beipsiele.

Beispiel 4.6

Gegeben ist die kombinierte Schaltung nach Bild 4.17. Sie besteht aus der Parallelschaltung von R und L_1, zu der ein weiteres L_2 in Reihe liegt. Die Werte sind $R = 20\,\Omega$, $L_1 = 30$ mH und $L_2 = 10$ mH. Die Frequenz wird von 0 bis ∞ geändert. Gesucht sind die Widerstands- und Leitwertortskurven.

Lösung

— Man zeichnet zuerst die Leitwertortskurve der Parallelschaltung von R und L_1 (Bild 4.17). Den prinzipiellen Verlauf zeigt Bild 4.7.

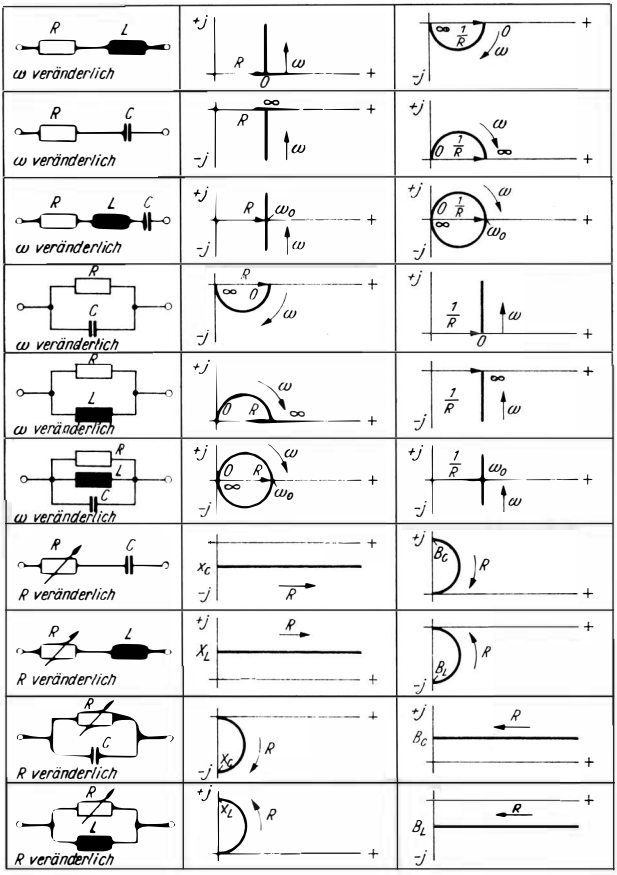


Bild 4.16 Grundsätzlicher Verlauf der Ortskurven einiger Grundschaltungen der Wechselstromtechnik

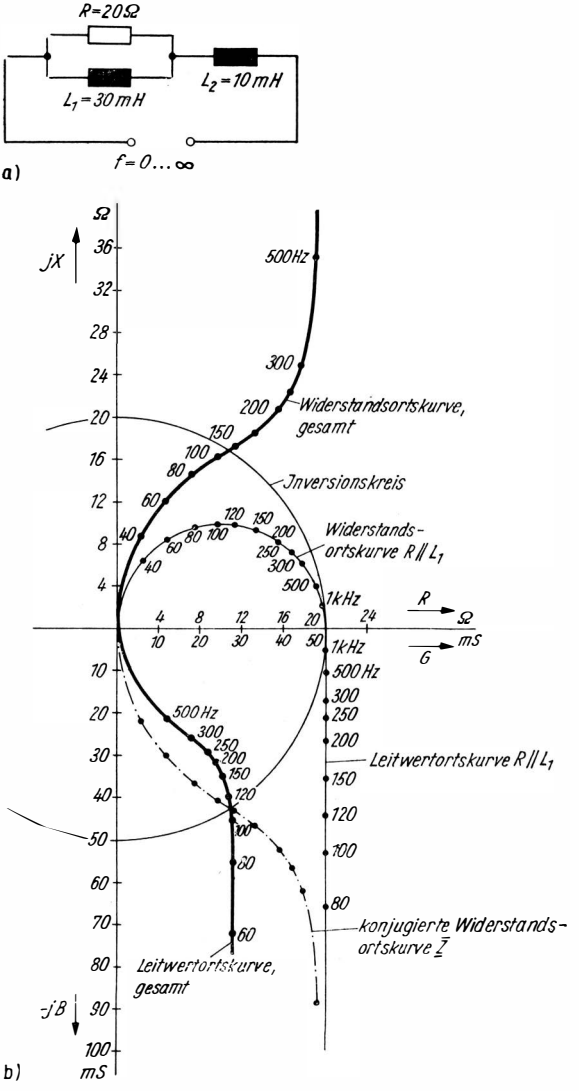


Bild 4.17 Ortskurven zum Beispiel 4.6; a – Schaltung, b – Widerstands- und Leitwertortskurven

Die Leitwertortskurve verläuft im Abstand von

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{20\,\Omega} = 50\ \text{mS}$$

parallel zur imaginären Achse.
Als Leitwertmaßstab wird 1 cm $\triangleq$ 10 mS gewählt.
Für die Teilung auf dieser Leitwertgeraden ergeben sich nach der Beziehung

$$\underline{G} = G - j\frac{1}{\omega L_1}$$

folgende Werte für $\frac{1}{\omega L_1}$:

f in Hz	80	100	120	150	200	350	300	500	1000
$\frac{1}{\omega L_1}$ in mS	66,3	53	44,2	35,4	26,5	21,2	17,7	10,6	5,3

Entsprechend dem gewählten Leitwertmaßstab überträgt man diese Werte auf die Leitwertortskurve.

— Nun wird die Widerstandsortskurve für die Parallelschaltung von R und L_1 gezeichnet. Diese ist ein Halbkreis oberhalb der reellen Achse. Den Kreisdurchmesser bestimmt $R = 20\,\Omega$. Bei einem Widerstandsmaßstab 1 cm $\triangleq 4\,\Omega$ liegt der Kreismittelpunkt bei

$$\frac{20\,\Omega}{2} = 10\,\Omega \triangleq 2{,}5\ \text{cm}.$$

Die Frequenzteilung auf dieser Widerstandsortskurve erhält man durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse.

— Jetzt läßt sich die Widerstandsortskurve der gesamten Schaltung zeichnen. Dazu muß L_2 in Reihe zur Parallelschaltung von R und L_1 liegen. Man braucht also nur die Widerstandswerte von L_2, d. h. $jX_L = j\omega L_2$, in Richtung der positiven imaginären Achse hinzuzuzählen.
Dazu werden für die bereits gewählten Frequenzen die Widerstandswerte von L_2 errechnet:

f in Hz	80	100	120	150	200	250	300	500	1000
ωL_2 in H	5,02	6,28	7,54	9,41	12,56	15,7	18,8	31,4	62,8

Diese Werte trägt man vom Widerstandskreis der Parallelschaltung aus R und L_1 an den jeweiligen Frequenzmarkierungen nach oben ab. Als Ortskurve des Gesamtwiderstands ergibt sich eine Kurve, die nicht mehr mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Solche Kurven muß man punktweise zeichnen.

— Die Leitwertortskurve der Gesamtschaltung läßt sich ebenfalls nur durch punktweise Konstruktion ermitteln. Um diese Polarenkonstruktion durchzuführen, benötigt man den Inversionskreis.

Zuerst wird die gesamte Widerstandsortskurve an der reellen Achse gespiegelt, d. h., die konjugiert komplexe Widerstandskurve $\underline{\overline{Z}}$ dargestellt.

Nun zeichnet man den Inversionskreis, dessen Radius nach dem Gesetz der reziproken Radien — Gl. (3.2) bestimmt wird.

In die Beziehung

$$r_0 = \sqrt{|Z| \cdot |G|}$$

werden direkt die Zentimeterwerte für die zusammengehörenden Werte von Widerstand und Leitwert eingesetzt. Also ist

$$r_0 = \sqrt{\text{Widerstandsstrecke} \cdot \text{Leitwertstrecke.}} \qquad (4.4)$$

Im vorliegenden Beispiel beträgt die Widerstandsstrecke für

$R = 20\,\Omega$ gleich 5 cm und für

die Leitwertstrecke

$$G = \frac{1}{20\,\Omega} = 50\ \text{mS}$$ ebenfalls 5 cm.

Somit wird nach Gl. (4.4) der Radius des Inversionskreises

$$r_0 = \sqrt{5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}} = 5\ \text{cm}.$$

Danach spiegelt man die konjugiert komplexe Widerstandskurve $\underline{Z}$ an diesem Inversionskreis. Durch punktweise Polarenkonstruktion entsteht die in Bild 4.17 dargestellte Ortskurve des komplexen Leitwerts für die Gesamtschaltung.

Die Polarenkonstruktion für die Frequenzen ab 150 Hz bis 500 Hz erfolgt von innen nach außen, wie es in Abschnitt 3.1.2., Beispiel 3.3, erläutert wurde.

Zur Kontrolle der durchgeführten Ortskurvenkonstruktion soll bei der Frequenz f = 100 Hz überprüft werden, ob die errechneten Werte mit den gezeichneten übereinstimmen.

Der komplexe Gesamtwiderstand der Schaltung ist

$$\underline{Z} = \frac{R\ (\omega L_1)^2\ \Omega}{R^2 + (\omega L_1)^2} + j\,\frac{R^2\ \omega\ L_1\ \Omega}{R^2 + (\omega L_1)^2} + j\omega L_2 \Omega.$$

Nach Einsetzen der Werte erhält man

$$\underline{Z} = \frac{20\ (2\pi \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^{-3})\,\Omega}{20^2 + (2\pi \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^{-3})} + j\,\frac{20^2 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^{-3}\,\Omega}{20^2 + (2\pi \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^{-3})} + j\ 2\pi \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\,\Omega,$$

$$\underline{Z} = (9{,}4 + j\ 9{,}9 + j\ 6{,}28)\,\Omega,$$

$$\underline{Z} = (9{,}4 + j\ 16{,}18)\,\Omega.$$

Der Wert stimmt hinreichend genau mit der Zeichnung überein. Auch der Gesamtleitwert bei dieser Frequenz von

$$\underline{G} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(9{,}4 + j\ 16{,}18)\ \Omega},$$

$$\underline{G} = \frac{1 \cdot (9{,}4 - j\ 16{,}18)\ S}{(9{,}4 + j\ 16{,}18) \cdot (9{,}4 - j\ 16{,}18)},$$

$$G = (28{,}5 - j\ 43{,}4)\ mS,$$

ist analog dem Zeichnungswert.

Auch hier läßt sich wieder schnell und einfach der Betrag und die Phase des komplexen Widerstands oder Leitwerts der Zeichnung entnehmen. So wird bei $f = 100$ Hz für den Betrag des komplexen Leitwerts, das ist die Strecke vom Koordinatenursprung bis zur 100-Hz-Markierung auf der Leitwertkurve, eine Länge von 5,3 cm gemessen. Unter Berücksichtigung des gewählten Maßstabs von 1 cm $\triangleq$ 10 mS erhält man für den Betrag $|\,G\,| = 53$ mS. Der Winkel φ beträgt $-59°$, somit ergibt sich

$$\underline{G} = 53 \cdot e^{-j59°}\ \text{mS}.$$

Beispiel 4.7

Gegeben ist die kombinierte Schaltung nach Bild 4.18 mit den Werten $R = 500\,\Omega$, $L = 0{,}2$ H und $C = 2\,\mu$F. Die Frequenz ändert sich von $f = 0$ bis ∞.
Gesucht werden die Widerstands- und Leitwertortskurven der Gesamtschaltung.

Lösung

Man führt die Konstruktion nach folgenden Schritten aus:

— Es werden zuerst die beiden Ortskurven der Reihenschaltung von R und L gezeichnet. Den Prinzipverlauf entnehmen wir Bild 4.11.
Die Widerstandsgerade beginnt im Abstand $R = 500\,\Omega$. Der Widerstandsmaßstab wird mit 1 cm $\triangleq$ 200 Ω festgelegt. Die Frequenzteilung auf dieser Ortskurve ist wegen

$$\underline{Z} = R + j\,\omega\,L$$

linear, und die Teilung läßt sich leicht anbringen.
Der Kreisdurchmesser des Leitwertkreises wird bestimmt durch

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{500\,\Omega} = 2\ \text{mS}.$$

Als Leitwertmaßstab wählt man 1 cm $\triangleq$ 0,5 mS.
Zur Teilung auf dem Leitwertkreis wird wieder der Winkel an der reellen Achse gespiegelt.

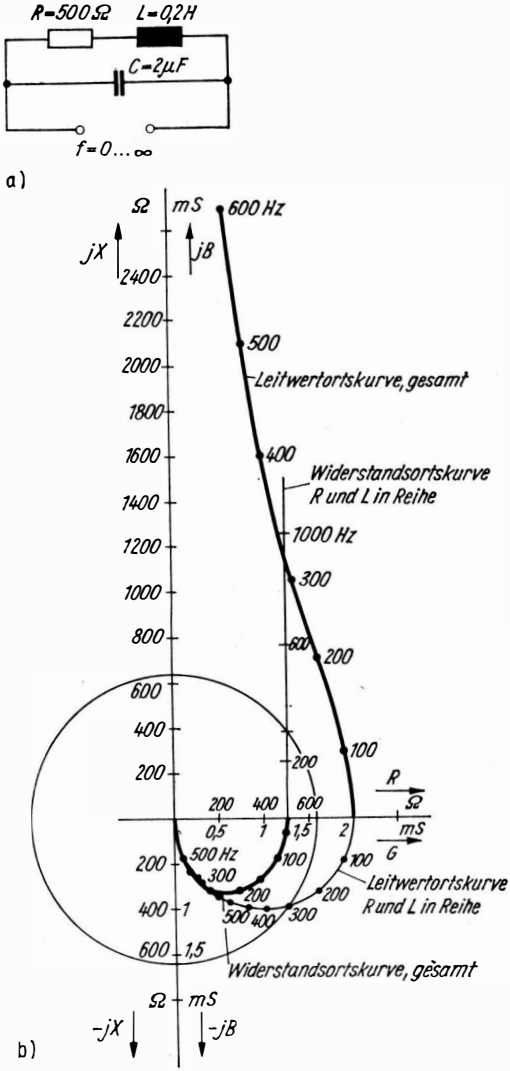


Bild 4.18 Ortskurve zum Beispiel 4.7; a – Schaltung, b – Widerstands- und Leitwertortskurven

– Zu dieser Leitwertortskurve aus R und L sind nun die Leitwerte der parallelliegenden Kapazität hinzuzufügen. Man errechnet deshalb für die angegebenen Frequenzen nach der Beziehung $jB_C = j\omega C$ die Leitwerte der Kapazität:

f in Hz	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$j\omega C$ in mS	1,25	2,51	3,76	5,02	6,27	7,52	8,79	10	11,3	12,56

Diese Werte werden an dem vorhandenen Leitwertkreis nach oben angetragen, und es entsteht die in Bild 4.18 dargestellte Leitwertortskurve der Gesamtschaltung.

– Um die Widerstandsortskurve der Gesamtschaltung konstruieren zu können, benötigt man den Inversionskreis. Der Radius r_0 des Inversionskreises ergibt sich aus den zusammengehörenden Widerstands- und Leitwertstrecken.
Der Widerstand $R = 500\,\Omega$ ist in der Darstellung 2 cm und der dazugehörende Leitwert $\frac{1}{500\,\Omega} = 2$ mS 4 cm lang. Nach Gl. (4.4) ergibt sich somit für den Radius des Inversionskreises

$$r_0 = \sqrt{2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}} = 2{,}83\text{ cm}.$$

– Nach dem Zeichnen des Inversionskreises wird mit der Polarenkonstruktion die gesamte Leitwertortskurve invertiert, und man erhält die in Bild 4.18 dargestellte Widerstandsortskurve der Gesamtschaltung.
Es ist zu beachten, daß diese Widerstandsortskurve kein Halbkreis ist. Ein Halbkreis entsteht nur dann, wenn eine Gerade invertiert wird.

Beispiel 4.8

Gegeben ist die Schaltung nach Bild 4.19 mit den Werten $R_1 = 20\,\Omega$, $L = 50$ mH, $R_2 = 10\,\Omega$ und $C = 50\,\mu$F.
Gesucht werden die Widerstands- und Leitwertortskurven in Abhängigkeit von der Frequenz ($f = 0$ bis ∞).

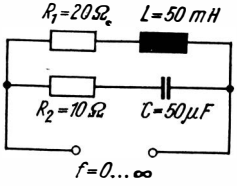


Bild 4.19
Schaltung zum Beispiel 4.8

Lösung

— Die Schaltung besteht aus 2 parallelgeschalteten Reihenschaltungen. Um einen besseren Überblick zu erhalten, bezeichnet man die Reihenschaltung von $R_1 + j\omega L$ mit $\underline{Z}_1$ und die Reihenschaltung von $R_2 - j\,\dfrac{1}{\omega C}$ mit $\underline{Z}_2$. Zuerst werden die Widerstandsortskurven der beiden Reihenschaltungen ermittelt. Es sind 2 Geraden, die im Abstand $R_1 = 20\,\Omega$ von der imaginären Achse nach oben bzw. im Abstand $R_2 = 10\,\Omega$ von der imaginären Achse nach unten verlaufen.

Die Teilung auf der $\underline{Z}_1$-Ortskurve ist wegen ωL linear, dagegen die auf der $\underline{Z}_2$-Ortskurve wegen $\dfrac{1}{\omega C}$ nicht.

Für den Ausdruck $\dfrac{1}{\omega C}$ sind deshalb einige Werte (Bild 4.20) zu bestimmen. Der Widerstandsmaßstab ist 1 cm $\triangleq$ 10 Ω, und für die Leitwerte entspricht 1 cm gleich 10 mS.

— Nun zeichnet man die Leitwertortskurven für die beiden Reihenschaltungen. Für $\underline{Z}_1$ ergibt sich ein Halbkreis unterhalb der reellen Achse mit dem Kreisdurchmesser von

$$G = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{20\,\Omega} = 50\ \text{mS} \triangleq 5\ \text{cm}$$

und für die Leitwertortskurve von $\underline{Z}_2$ ein Halbkreis oberhalb der reellen Achse mit dem Durchmesser

$$G = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10\,\Omega} = 100\ \text{mS} \triangleq 10\ \text{cm}.$$

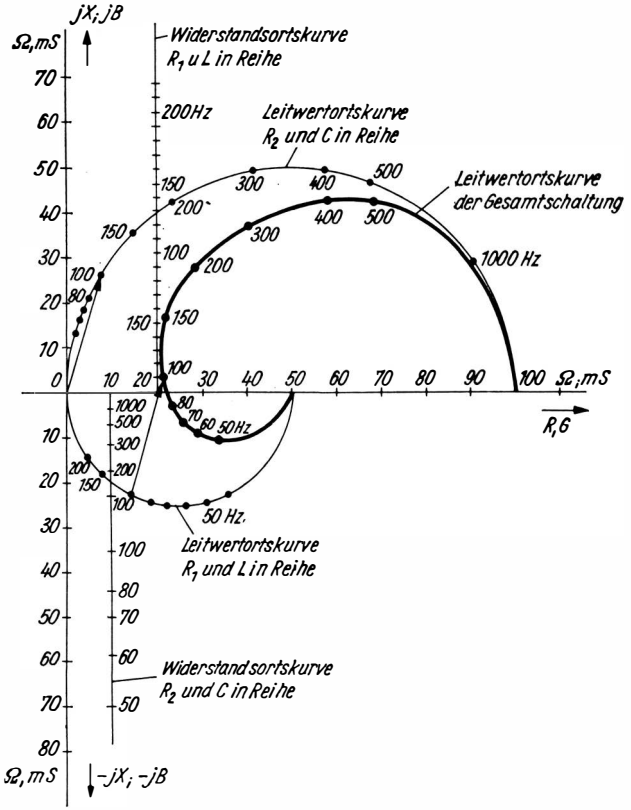


Bild 4.20 Leitwertkurven zum Beispiel 4.8

Die Teilung auf den Leitwertkreisen erhält man wieder durch Spiegelung der Winkel an der reellen Achse.

— Aus den beiden Leitwertortskurven für $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ läßt sich nun die Leitwertortskurve für die Gesamtschaltung konstruieren. Das geschieht punktweise durch die geometrische Addition der beiden Teilleitwerte; d. h., man trägt an den Frequenzmarken der $\underline{Z}_2$-Leitwertortskurve die Länge der

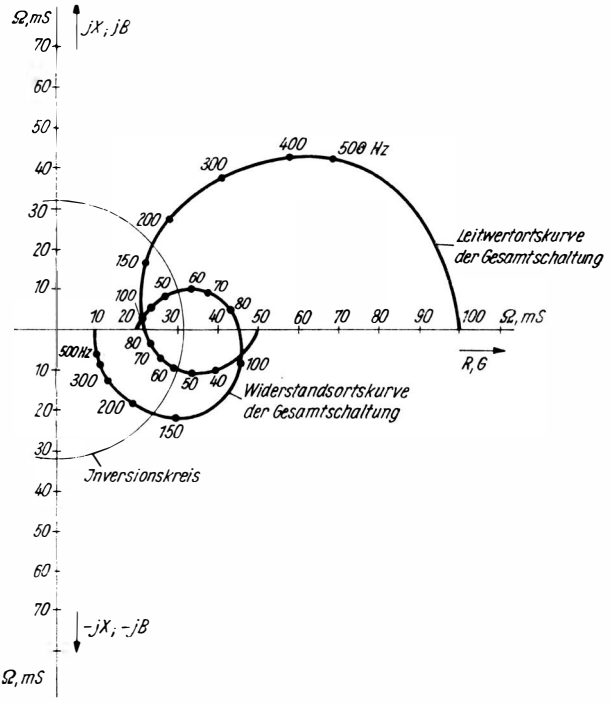


Bild 4.21 Leitwert- und Widerstandskurven zum Beispiel 4.8

Z_1-Leitwerte mit entsprechendem Winkel an. In Bild 4.20 ist es für die Frequenz f = 100 Hz gezeigt.

— Jetzt kann die Gesamtwiderstandsortskurve aus der Gesamtleitwertortskurve konstruiert werden. Zur besseren Übersicht ist die Gesamtleitwertortskurve in Bild 4.21 nochmals dargestellt. Für die Konstruktion benötigt man den Inversionskreis. Der Radius läßt sich wieder nach Gl. (4.4) bestimmen. Der Widerstand von $R = 50\,\Omega$ entspricht 5 cm und der dazugehörende Leitwert $\frac{1}{R} = \frac{1}{50\,\Omega} =$ 20 mS einer Länge von 2 cm.

Somit ergibt sich der Radius des Inversionskreises zu

$$r_0 = \sqrt{5\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm}} = 3{,}16\ \text{cm}.$$

Nun kann man mit Hilfe der Polarenkonstruktion punktweise die Gesamtleitwertortskurve invertieren und erhält die in Bild 4.21 dargestellte Widerstandsortskurve der Gesamtschaltung.

Eine grobe Auswertung der Widerstandsortskurve ergibt:

- bei $f = 0$ wirkt nur der Ohmsche Widerstand $R_2 = 10\,\Omega$,
- bei $f = \infty$ wirkt nur der Ohmsche Widerstand $R_1 = 20\,\Omega$,
- die Resonanzfrequenz liegt bei etwa 90 Hz,
- der Phasenwinkel φ ist zwischen f etwa 90 Hz bis $f = \infty$ negativ und zwischen $f = 0$ bis etwa $f = 90$ Hz positiv.

Die Beispiele beweisen, daß die Ortskurvendarstellung schnell einen Überblick über das Gesamtverhalten der Schaltungen vermittelt.

5. Ortskurven von Strom und Spannung

In den bisherigen Abschnitten sind nur Widerstands- und Leitwertortskurven erläutert worden. Nach den gleichen Prinzipien lassen sich Ortskurven für Spannungen und Ströme darstellen.

Entsprechend dem Ohmschen Gesetz

$$U = I \cdot R$$

ist die Spannung dem Widerstand proportional.
Ebenso ist nach der Beziehung

$$I = \frac{U}{R} = U \cdot G$$

der Strom proportional dem Leitwert.
Die gleichen Beziehungen sind in der Wechselstromtechnik gültig. Hier wird nur mit komplexen Strömen, Spannungen und Widerständen gerechnet.
So wie sich die Widerstände im Wechselstromreihenkreis geometrisch addieren, addieren sich auch die Teilspannungen über diesen Widerständen geometrisch (Bild 5.1). Der Stromzeiger ist dabei Bezugsgröße und liegt auf der reellen Achse. Bei der Parallelschaltung gilt das gleiche für die Leitwerte und Ströme (Bild 5.2). Jetzt ist die Spannung Bezugsgröße und liegt in Richtung der reellen Achse.
Kann entweder der Strom als konstant angesehen werden, d. h. $R_i \gg \underline{Z}$, bzw. bleibt die Spannung konstant, d. h. $R_i \ll \underline{Z}$, so ergeben sich für die Konstruktion von Spannungs- und Stromortskurven folgende Merksätze:

- Die Widerstandsortskurven sind nach der Beziehung $\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$ zugleich Spannungsortskurven.
- Die Leitwertortskurven sind entsprechend der Beziehung $\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{G}$ zugleich Stromortskurven.
- Der Spannungsmaßstab ergibt sich aus dem Produkt Strom mal Widerstandsmaßstab.

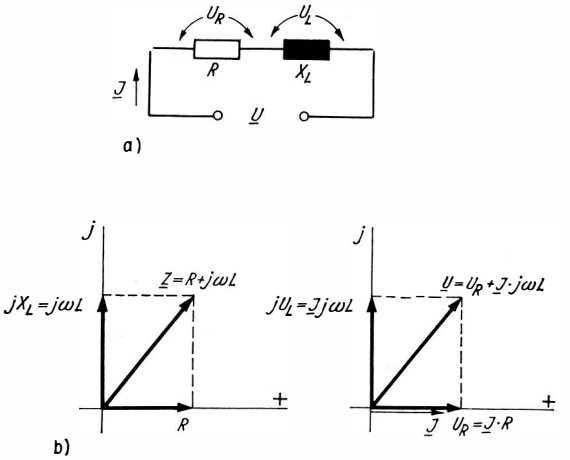


Bild 5.1 Die Spannungen verhalten sich proportional den Widerständen; a — Schaltung, b — Zeigerbildung von Widerstand und Spannung

— Der Strommaßstab ergibt sich aus dem Produkt Spannung mal Leitwertmaßstab.

Es soll nun die Konstruktion von Spannungs- und Stromortskurven an einigen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 5.1

Gegeben ist die Reihenschaltung nach Bild 5.3 mit den Werten $R = 10\ k\Omega$ und $L = 5\ mH$. Der Strom sei konstant und beträgt $|I| = 10\ mA$ (d. h., der Generatorinnenwiderstand ist hochohmig gegenüber dem Lastwiderstand $\underline{Z}$). Die Frequenz ändert sich von $f = 100\ kHz$ bis $500\ kHz$.

Gesucht wird die Ortskurve der angelegten Spannung $\underline{U}$.

Lösung

— Zeichnen der Widerstandsortskurve. Dabei handelt es sich um eine Gerade im Abstand $R = 10\ k\Omega$ von der positiven imaginären Achse (Bild 5.3).

Der Widerstandsmaßstab ist 1 cm $\triangleq$ 2 kΩ.

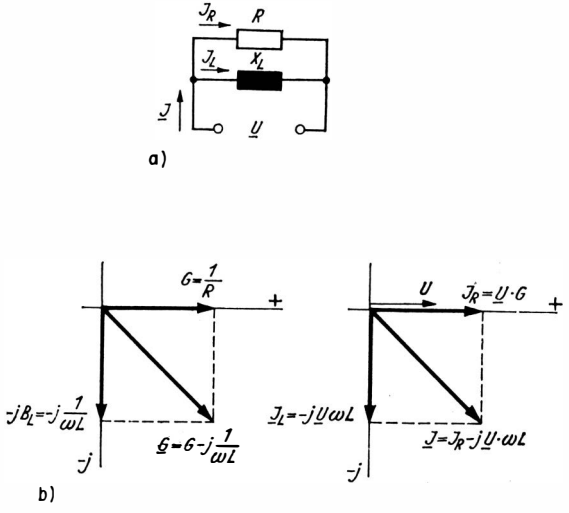


Bild 5.2 Die Ströme verhalten sich proportional den Leitwerten; a — Schaltung, b — Zeigerbildung von Leitwerten und Spannung

— Anbringen der Frequenzteilung auf der Widerstandsgeraden. Dazu errechnet man bei einer Frequenz, z. B. bei f = 100 kHz den Widerstandswert für $j\omega L$

$$jX_L = j\omega L = j\,2\pi \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = j\,3{,}14\ k\Omega.$$

Da die Teilung linear erfolgt, lassen sich gleiche Strecken je 100 kHz bis zur Frequenz f = 500 kHz abtragen.

— Aus den Merksätzen ist bekannt, daß die gezeichnete Widerstandsortskurve zugleich die Spannungsortskurve darstellt.

— Benötigt wird nur noch der entsprechende Spannungsmaßstab. Dieser ergibt sich aus dem Produkt Strom mal Widerstandsmaßstab:

$$\text{Spannungsmaßstab} = I \cdot \text{Widerstandsmaßstab}$$

$$= 10\ mA \cdot \frac{2\ k\Omega}{cm} = 20\ V/cm$$

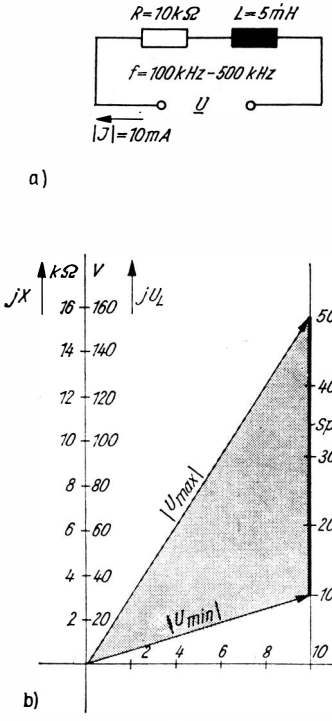


Bild 5.3 Zum Beispiel 5.1; a — Schaltung, b — Spannungskurve der Reihenschaltung von R und L

Nachdem dieser Maßstab an das Koordinatenkreuz angetragen wurde, lassen sich die Werte der Klemmenspannung in Abhängigkeit der Frequenz direkt von der Spannungsortskurve ablesen.

So ist z. B. bei f = 100 kHz die Klemmspannung

$$\underline{U} = U_R + jU_L$$
$$\underline{U} = (100 + j\,31{,}4)\ \mathrm{V}$$

oder bei f = 500 Hz

$$\underline{U} = (100 + j\,157)\ \mathrm{V}.$$

Auch die Beträge der Spannung und die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom können sofort der Ortskurve entnommen werden. In Bild 5.3 sind z. B. die beiden Grenzwerte $|\,I_{min}\,|$ und $|\,U_{max}\,|$ eingezeichnet. $|\,U_{min}\,|$ entspricht einer Strecke von 5,3 cm. Mit dem festgelegten Spannungsmaßstab von 1 cm $\triangleq$ 20 V ergibt sich der Wert für $|\,U_{min}\,|$ zu

$$|\,U_{min}\,| = 5{,}3\ \text{cm} \cdot \frac{20\ \text{V}}{\text{cm}} = 106\ \text{V}.$$

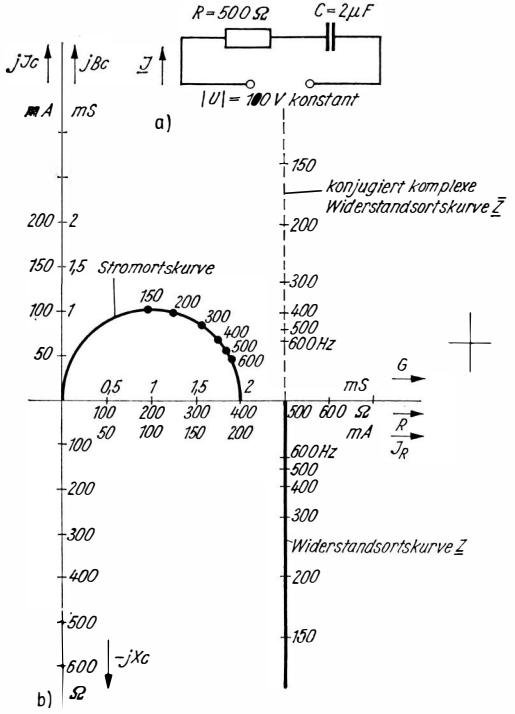


Bild 5.4 Ortskurven zum Beispiel 5.2; a — Schaltung, b — Stromortskurve

Für $|U_{max}|$ erhält man eine Strecke von 9,3 cm, d. h.,

$$|U_{max}| = 9{,}3\ \text{cm} \cdot \frac{20\ \text{V}}{\text{cm}} = 186\ \text{V}.$$

Beispiel 5.2

Gegeben ist die Reihenschaltung von R und C nach Bild 5.4 mit den Werten $R = 500\,\Omega$ und $C = 2\,\mu\text{F}$. Die Klemmenspannung sei konstant und beträgt $|U| = 100$ V (d. h., der Generatorwiderstand R_i ist niederohmig gegenüber $\underline{Z}$).
Die Frequenz ändert sich von 0 Hz bis ∞ Hz.
Gesucht wird die Stromortskurve in Abhängigkeit der Frequenz.

Lösung

— Zeichnen der Widerstandsortskurve. Sie verläuft als Gerade im Abstand $R = 500\,\Omega$ von der negativen imaginären Achse. Als Widerstandsmaßstab eignet sich 1 cm $\triangleq 100\,\Omega$.
Die Frequenzteilung auf der Widerstandsgeraden ist wegen des Ausdrucks $\frac{1}{\omega C}$ nicht linear, deshalb werden einige Werte für diesen Ausdruck errechnet. Bild 5.4 zeigt dies für die Frequenzen von 150 Hz bis 600 Hz.

— Zeichnen der Leitwertortskurve. Es ergibt sich ein Halbkreis oberhalb der reellen Achse. Der Kreisdurchmesser wird bestimmt durch

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{500\,\Omega} = 2\ \text{mS}.$$

Die Frequenzteilung auf dieser Leitwertortskurve bestimmt wieder die Spiegelung der Winkel an der reellen Achse.

— Entsprechend den angeführten Merksätzen stellt die gezeichnete Leitwertortskurve bereits die Stromortskurve dar. Der Strommaßstab ergibt sich aus dem Produkt Spannung mal Leitwertmaßstab und beträgt

$$|100\ \text{V}| \cdot \frac{0{,}5\ \text{mS}}{\text{cm}} = \frac{50\ \text{mA}}{\text{cm}}.$$

Dieser Maßstab wird an beide Achsen des Koordinatenkreuzes angetragen.

Die Stromortskurve ist in Bild 5.4 dargestellt.

Beispiel 5.3

Gegeben ist die gemischte Schaltung nach Bild 5.5 mit den Werten $R_1 = 10\,k\Omega$, $R_2 = 20\,k\Omega$ und $L = 5\,mH$. Die Frequenz ändert sich von $f = 0$ Hz bis $f = 500$ Hz. Der Strom sei konstant (R_1 also hochohmig) und beträgt $|I| = 10\,mA$. Gesucht wird die Ortskurve der Klemmenspannung $\underline{U}$.

Lösung

— Zeichnen der Widerstandsortskurve $\underline{Z}_1$ der Reihenschaltung von R_1 und L. Es ist eine Gerade im Abstand $R_1 = 10\,k\Omega$

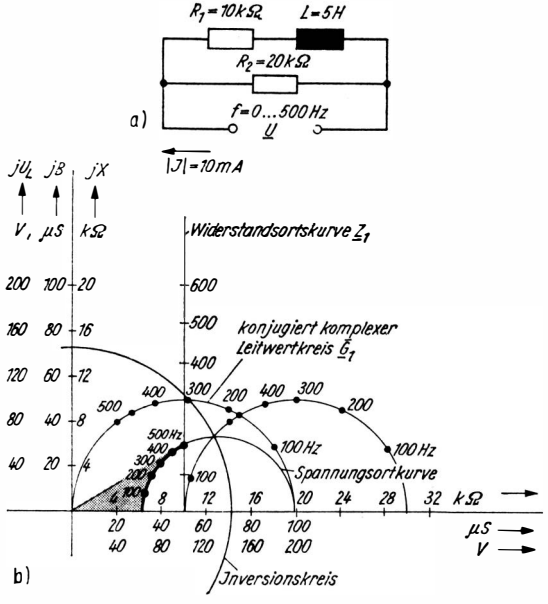


Bild 5.5 Ortskurven zum Beispiel 5.3; a — Schaltung, b — Spannungsortskurve

von der positiven imaginären Achse. Als Widerstandsmaßstab wählt man 1 cm $\triangleq$ 4 kΩ.
Die Frequenzteilung auf dieser Widerstandsgeraden ist wegen des Ausdrucks ωL linear und wird, wie bereits bekannt, angebracht.

— Nun zeichnet man für $\underline{Z}_1$ die Leitwertortskurve $\underline{G}_1$. Sie ist nach dem 2. Ortskurvensatz ein Halbkreis unterhalb der reellen Achse und geht durch den Koordinatenursprung. Der Kreisdurchmesser ist festgelegt nach

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{10\,\text{k}\Omega} = 100\,\mu\text{S}.$$

Als Leitwertmaßstab eignet sich 1 cm $\triangleq$ 20 μS.
Der Leitwertkreis wird noch an der reellen Achse gespiegelt, und es entsteht der konjugiert komplexe Leitwertkreis $\underline{G}_1$. In Bild 5.5 ist zur besseren Übersicht nur dieser konjugierte Halbkreis gezeichnet. Man braucht dann bei der noch durchzuführenden Polarenkonstruktion nicht mehr an der reellen Achse zu spiegeln.

— $\underline{Z}_1$ liegt $R_2 = 20\,\text{k}\Omega$ parallel. Der Leitwert von R_2, d. h.

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20\,\text{k}\Omega} = 50\,\mu\text{S}$$

muß also zu $\underline{G}_1$ addiert werden. Da G_2 nur eine reelle Komponente darstellt, verschiebt sich logischerweise der gesamte Leitwertkreis von $\underline{G}_1$ um diese 50 μS nach rechts. In Bild 5.5 ist wieder der konjugierte Leitwertkreis der Gesamtschaltung, also $\underline{\overline{G}}$, dargestellt.

— Um die Widerstandsortskurve der Gesamtschaltung, die auch zugleich die Spannungsortskurve darstellt, zu erhalten, wird die Leitwertortskurve am Inversionskreis gespiegelt. Der Radius des Inversionskreises läßt sich nach Gl. (4.4) aus den zusammengehörenden Widerstands- und Leitwertstrecken bestimmen. Der Widerstand von R = 10 kΩ entspricht einer Strecke von 2,5 cm und der Leitwert $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{10\,\text{k}\Omega} = 100\,\mu\text{S}$ einer Strecke von 5 cm.

Somit ergibt sich der Radius des Inversionskreises zu

$$r_0 = \sqrt{2{,}5\ \text{cm} \cdot 5\ \text{cm}} = 3{,}54\ \text{cm}.$$

Da in Bild 5.5 der konjugiert komplexe Leitwertkreis $\overline{\underline{G}}$ gezeichnet ist, ist die Spiegelung an der reellen Achse nicht mehr notwendig und man kann gleich den Leitwertkreis am Inversionskreis spiegeln.

Die Spiegelung am Inversionskreis erfolgt mit der Polarenkonstruktion punktweise. Nach dem 4. Ortskurvensatz muß sich als invertierte Kurve wieder ein Kreis ergeben, der nicht durch den Inversionsmittelpunkt geht. In Bild 5.5 ist die Widerstandsortskurve der Gesamtschaltung, die zugleich die Spannungsortskurve darstellt, wiedergegeben.

— Nun muß noch der Spannungsmaßstab festgelegt werden. Er ergibt sich aus dem Produkt Strom mal Widerstandsmaßstab, d. h.,

$$\text{I} \cdot \text{Widerstandsmaßstab} = 10\ \text{mA} \cdot \frac{4\ \text{k}\Omega}{\text{cm}} = 40\ \text{V/cm}.$$

Diesen Maßstab trägt man an die beiden Achsen an und kann nun unmittelbar ablesen, wie sich die Klemmenspannung $\underline{U}$ in Abhängigkeit der Frequenz ändert. Der gesuchte Bereich von 0 Hz bis 500 Hz ist in Bild 5.5 besonders gekennzeichnet.

Zur Kontrolle und zum Beweis soll die Spannung $\underline{U}$ an den beiden Grenzfällen $f = 0$ Hz und $f = \infty$ Hz berechnet und mit der Zeichnung kontrolliert werden.

Bei $f = 0$ Hz ist der Ausdruck $j\omega L$ ebenfalls gleich 0, d. h., es wirkt nur noch die Parallelschaltung von R_1 und R_2. Der Gesamtwiderstand beträgt somit

$$\underline{Z} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3} = 6{,}68\ \text{k}\Omega.$$

Die Spannung ergibt sich zu

$$U_R = I \cdot R = 10\ \text{mA} \cdot 6{,}68\ \text{k}\Omega = 66{,}8\ \text{V}.$$

Bei $f = \infty$ Hz ist $j\omega L$ unendlich groß, d. h., es wirkt nur noch R_2,

$$\underline{Z} = R_2 = 20\ \text{k}\Omega.$$

Für die Spannung ergibt sich somit

$$U_R = I \cdot R = 10\ \text{mA} \cdot 20\ \text{k}\Omega = 200\ \text{V}.$$

Die Ortskurve bestätigt das Ergebnis.

6. Kreisdiagramme

Die bisherigen Abschnitte und Beispiele beschrieben Widerstands-, Leitwerts-, Spannungs- und Stromortskurven in Abhängigkeit einer Größe, entweder der Frequenz oder eines Schaltelements. Als Ergebnis entstand stets nur eine Ortskurve. Wenn man die Werte der Schaltelemente zusätzlich verändert, gewissermaßen als Parameter, ergeben sich ständig neue Ortskurven. Diese haben zwar immer den gleichen prinzipiellen Verlauf, sind aber um die entsprechenden Größenunterschiede von R, L oder C entweder in Richtung der reellen Achse oder der imaginären Achse verschoben; Ortskurvenscharen sind die Folge.
Die grafische Darstellung solcher Scharen von Ortskurven bezeichnet man als Kreisdiagramme. Damit sich die Diagramme für alle vorkommenden Zahlenwerte anwenden lassen, sind sie normiert, d. h., es werden nur Verhältnisse dargestellt. Die Kreisdiagramme eignen sich in der Praxis besonders für die

- Umwandlung von Widerständen in Leitwerte,
- Umwandlung von Reihen- in Parallelschaltungen,
- Lösung von Transformationsaufgaben,
- Berechnung von gemischten Schaltungen,
- Darstellung von Ortskurven von Bauelementen,
- Lösung von Problemen in der Leitungs- und Antennentechnik usw.

Kreisdiagramme sind ein Hilfsmittel, um den Rechenaufwand für Aufgaben der genannten Probleme wesentlich herabzusetzen. Praktische Bedeutung haben das Widerstandsdiagramm und das *Smith*-Diagramm erlangt. Mit ihrer Hilfe werden im folgenden einige praktische Beispiele gelöst. Das Widerstandsdiagramm ist im Unterschied zum *Smith*-Diagramm unendlich ausgedehnt und liefert deshalb relativ ungenaue Werte in der Nähe des Koordinatenursprungs. Das *Smith*-Diagramm dagegen hat eine endliche Ausdehnung, ist genauer und wird in

der Praxis häufiger verwendet. Die Diagramme sind im Fachhandel erhältlich.

6.1. Das Widerstandsdiagramm

Das Widerstandsdiagramm besteht aus Geraden und Kreisen. Bild 6.1 zeigt einen Ausschnitt aus diesem Diagramm. Es sind sowohl Geraden für den Realteil R und für den Imaginärteil X als auch Widerstands- und Leitwertkreise eingezeichnet. Die Kreise, deren Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt, bezeichnet man als die G-Kreise und die, deren Mittelpunkt auf der imaginären Achse liegt, als die B-Kreise. Die G-Kreise sind im

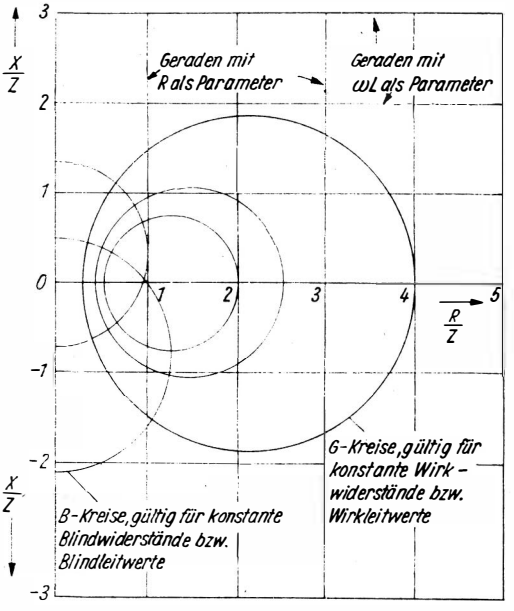


Bild 6.1 Ausschnitte aus dem Widerstandsdiagramm (*Schäfer*, Plauen, Bestellnummer 555)

Diagramm mit m und die B-Kreise mit $\frac{1}{\lambda}$ bezeichnet. Die Bedeutung dafür erkennt man beim Lösen von Aufgaben aus der Leitungstechnik.

Die Größen R und X sind auf die Größe Z, die allgemein den Wellenwiderstand darstellt, normiert. Somit eignet sich das Diagramm für alle in der Praxis vorkommenden Zahlenwerte. Die Entstehung und Ableitung des Diagramms soll nicht bewiesen werden. Das würde den Rahmen der Broschüre sprengen. In [1] sind dazu ausreichend Hinweise und Erläuterungen gegeben. Die folgenden Beispiele sollen mit dem Widerstandsdiagramm vertraut machen und dabei einige der verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten zeigen.

Für ein schnelles Arbeiten mit dem Diagramm verwendet man zweckmäßig das als Beilage mitgelieferte Hilfslineal. Damit ist es möglich, sofort die Zwischenwerte auf der $\frac{R}{Z}$-Achse und $\frac{X}{Z}$-Achse anzutragen oder abzulesen. Das Hilfslineal hat eine Länge von 15 cm, das entspricht einem normierten Wert $\frac{R}{Z} = 3$.

Es kann aber auch auf eine Länge von 25 cm erweitert werden. Damit läßt sich das gesamte Diagramm mit dem Endwert von $\frac{R}{Z}$ gleich 5 erfassen. Das Hilfslineal hat also die gleichen normierten Werte wie das Diagramm, ist jedoch zusätzlich in 0,1-Schritte unterteilt.

6.1.1. Umwandlung von Widerständen in Leitwerte und umgekehrt

Beispiel 6.1

Gegeben ist der komplexe Widerstand $\underline{Z} = (1{,}5 + j\,1{,}65)\,\Omega$.
Gesucht wird der komplexe Leitwert $\underline{G}$.

Lösung

— Zuerst wird im Diagramm der gegebene komplexe Widerstand $\underline{Z}$ gesucht. Er ist festgelegt durch den Schnittpunkt der beiden Geraden, die im Abstand $\frac{R}{Z} = 1{,}5$ von der imaginären Achse und im Abstand $\frac{X}{Z} = 1{,}65$ von der reellen Achse verlaufen. Zum Abmessen der Strecke $\frac{X}{Z} = 1{,}65$ sollte man das Hilfslineal bereits benutzen, da das Diagramm diesen Wert nicht enthält.

— Der Punkt $\underline{Z} = (1{,}5 + \mathrm{j}\,1{,}65)\,\Omega$ wird von einem G-Kreis und einem B-Kreis geschnitten. Der 2. Schnittpunkt der beiden Kreise liegt unterhalb der reellen Achse. Dieser 2. Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt des komplexen Leitwerts $\underline{G} = G - \mathrm{j}B$. Mit dem Hilfslineal mißt man die beiden Koordinaten des Punktes ab und erhält für den komplexen Leitwert

$$\underline{G} = (0{,}31 - \mathrm{j}0{,}34)\ \mathrm{S} = (310 - \mathrm{j}340)\ \mathrm{mS}\,.$$

Bild 6.2 zeigt die Konstruktion im Diagramm. Der Aufwand für diese einfache Aufgabe ist bereits geringer als der für eine rechnerische Lösung. Die Normierung auf Z muß bei dieser Aufgabe noch nicht berücksichtigt werden, d. h., man setzt $Z = 1$.

Liegen Widerstandswerte in höheren Größenordnungen vor, z. B.

$$Z = (1{,}5 + \mathrm{j}1{,}65)\ \mathrm{k}\Omega\,,$$

so läßt sich dieser Wert nicht mehr in das Diagramm eintragen. Das ist erst möglich, wenn der Wert mit einem Reduktionsfaktor in eine kleinere Größenordnung zurückgeführt wurde. Man muß also den Ausdruck $Z = (1{,}5 + \mathrm{j}1{,}65)\ \mathrm{k}\Omega$ durch 10^3 dividieren und dann aber den Leitwert wieder mit 10^3 multiplizieren.

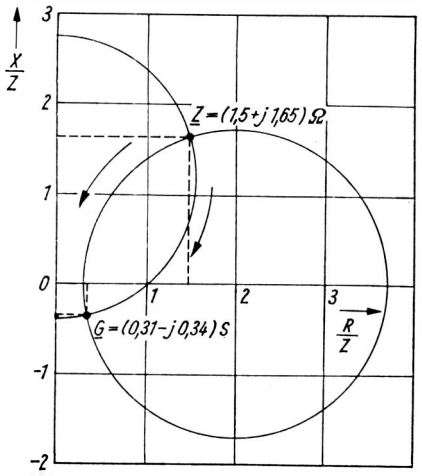


Bild 6.2 Zum Beispiel 6.1; Umwandlung eines Widerstands in einen Leitwert mit dem Widerstandsdiagramm

Also

$$\frac{\underline{Z}}{10^3} = (1{,}5 + \mathrm{j}1{,}65)\,\Omega\,.$$

Für den Leitwert ergibt sich dann

$$\underline{G} \cdot 10^3 = (0{,}31 - \mathrm{j}0{,}34)\ \mathrm{S}$$

und

$$\underline{G} = (310 - \mathrm{j}340)\,\mu\mathrm{S}\,.$$

Beispiel 6.2
Gegeben ist der komplexe Leitwert $\underline{G} = (0{,}9 - \mathrm{j}0{,}7)$ S.
Gesucht wird der komplexe Widerstand $\underline{Z}$.

Lösung
Die Konstruktion verläuft genau umgekehrt wie in Beispiel 6.1. Zuerst wird der Punkt $\underline{G} = (0{,}9 - \mathrm{j}0{,}7)$ S in das Diagramm eingetragen. Dann sucht man auf dem G- und B-Kreis den

2. Schnittpunkt dieser beiden Kreise und erhält den Punkt $\underline{Z}$. Mit dem Hilfslineal werden die Koordinaten des Punktes $\underline{Z}$ abgelesen, und es ergibt sich der gesuchte Widerstandswert (Bild 6.3) zu

$$Z = (0{,}69 + j0{,}52)\,\Omega\,.$$

Bild 6.3 zeigt die Konstruktion zum Beispiel 6.2. Dabei liegt Punkt $\underline{G}$ nicht exakt auf einem B-Kreis. In solchen Fällen muß man gedanklich einen Kreis einfügen und den Schnittpunkt etwas abschätzen.

6.1.2. Umwandlung einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung und umgekehrt

Es ist oft erforderlich, eine Reihenschaltung in eine gleichwertige Parallelschaltung umzuwandeln. Gleichwertig bedeutet, daß durch beide Schaltungen bei gleicher Spannung der gleiche Strom fließt. Die bekannten Formeln für die Umrechnung solcher Schaltungen sind

$$R_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{R_r} \text{ und } X_p = \frac{R_r^2 + X_r^2}{X_r}\,. \tag{6.1}$$

Auch ohne diese Formeln läßt sich mit dem Widerstandsdiagramm eine solche Umwandlung vornehmen.

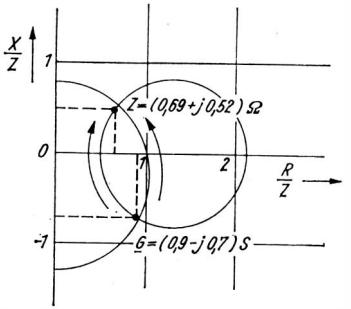


Bild 6.3
Zum Beispiel 6.2; Umwandlung eines Leitwerts in einen Widerstand mit dem Widerstandsdiagramm

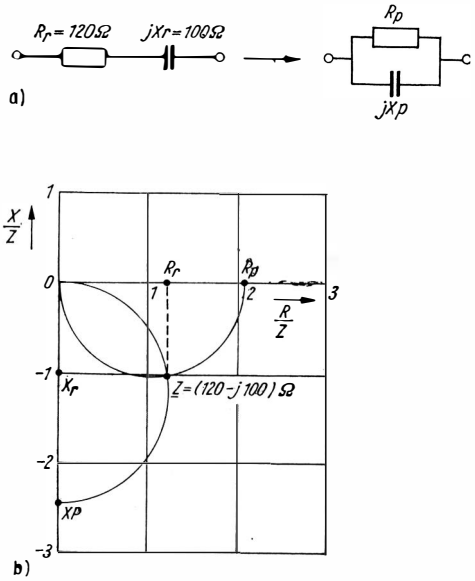


Bild 6.4 Umwandlung einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung nach Beispiel 6.3; a — Schaltung, b — Konstruktion

Beispiel 6.3

Gegeben ist die Reihenschaltung nach Bild 6.4 von R und C mit den Werten des komplexen Widerstands

$$\underline{Z} = R_r - jX_r = (120 - j100)\,\Omega\,.$$

Gesucht wird die gleichwertige Parallelschaltung mit R_p und X_p nach Bild 6.4.

Lösung

— Da das Diagramm für die gegebenen Werte nicht ausreicht, dividiert man Z durch 100 und erhält

$$\frac{Z}{100} = (1{,}2 - j1)\,\Omega\,.$$

Dieser Ausdruck wird in das Diagramm eingetragen.

— Nun schlägt man 2 Kreise mit dem Zirkel, die sowohl den Nullpunkt als auch den Punkt Z schneiden. Ein Kreis hat dabei den Mittelpunkt auf der reellen Achse, der andere auf der imaginären Achse. Die Radien der Kreise bestimmt man nach den Beziehungen

$$r_G = \frac{|Z|^2}{2 \cdot R} \text{ bzw. } r_B = \frac{|Z|^2}{2 \cdot X} . \tag{6.2}$$

Im Beispiel wurde für | Z | mit dem Hilfslineal die Strecke $\underline{OZ} = |Z| = 1{,}56$ abgelesen. Somit sind

$$r_G = \frac{|1{,}56|^2}{2 \cdot 1{,}2} = 1{,}02 \text{ und } r_B = \frac{|1{,}56|^2}{2 \cdot 1} = 1{,}22 .$$

— Die Schnittpunkte der beiden gezogenen Kreise mit der $\frac{R}{Z}$-Achse bzw. $\frac{X}{Z}$-Achse ergeben die Werte für R_p bzw. X_p. Mit dem Hilfslineal läßt sich

R_p zu 2,04 Ω und X_p zu 2,44 Ω

ermitteln.

Da $\underline{Z}$ durch 100 dividiert wurde, muß man nun R_p und X_p wieder mit 100 multiplizieren, also ist

$$R_p = 204\,\Omega \quad \text{und} \quad X_p = 244\,\Omega .$$

Bild 6.4 stellt die Konstruktion dar.

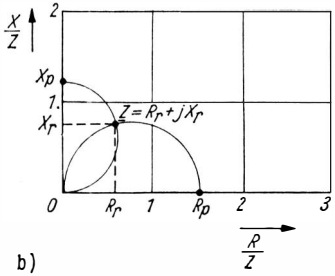
Beispiel 6.4

Gegeben ist eine Parallelschaltung nach Bild 6.5 mit den Werten $R_p = 1{,}5\,\Omega$ und $X_p = 1{,}2\,\Omega$.
Gesucht wird die gleichwertige Reihenschaltung mit R_r und X_r.

Lösung

— Den Wert $R_p = 1{,}5$ auf der $\frac{R}{Z}$-Achse und den Wert $X_p = 1{,}2$ auf der imaginären Achse antragen.

a)



b)

Bild 6.5 Umwandlung einer Parallelschaltung in eine Reihenschaltung nach Beispiel 6.4; a — Schaltung, b — Konstruktion

— Mit den Radien $\frac{R_p}{2}$ und $\frac{X_p}{2}$ 2 Halbkreise schlagen. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ergibt den Punkt $Z = R_r + jX_r$. Mit dem Hilfslineal mißt man die Werte für R_r und X_r ab und erhält

$$R_r = 0{,}59\,\Omega \qquad \text{und} \qquad X_r = 0{,}72\,\Omega\,.$$

Somit ist der gesuchte komplexe Reihenwiderstand

$$\underline{Z} = (0{,}59 + j0{,}72)\,\Omega\,.$$

Bild 6.5 zeigt die Konstruktion im Diagramm.

6.1.3. Aufgaben aus der Leitungstechnik

Bevor einige praktische Beispiele aus der Leitungstechnik mit Hilfe des Widerstandsdiagramms gelöst werden sollen, muß

man etwas mit den Widerstandsverhältnissen auf einer Leitung vertraut machen und daraus die Beziehungen zum Widerstandsdiagramm herstellen.

Der Leitungswiderstand einer verlustfreien Leitung nach Bild 6.6 ist

$$\underline{R}_x = Z \frac{\frac{\underline{Ra}}{Z} + j \tan \beta l}{1 + j \frac{\underline{Ra}}{Z} \tan \beta l}; \qquad (6.3)$$

Z — Wellenwiderstand der Leitung, $\underline{Ra}$ — Abschlußwiderstand, β — Phasenkonstante $\triangleq \frac{2\pi}{\lambda}$, l — Leitungslänge

Setzt man den Ausdruck für β in Gl. (6.3) ein und stellt nach $\frac{\underline{R}_x}{Z}$ um, so ergibt sich

$$\frac{\underline{R}_x}{Z} = \frac{\frac{\underline{Ra}}{Z} + j \tan 2\pi \frac{l}{\lambda}}{1 + j \frac{\underline{Ra}}{Z} \tan 2\pi \frac{l}{\lambda}}.$$

$\frac{\underline{R}_x}{Z}$ ist also eine Funktion von $\frac{\underline{Ra}}{Z}$ und $\frac{l}{\lambda}$;

$$\frac{\underline{R}_x}{Z} = f\left(\frac{\underline{Ra}}{Z}, \frac{l}{\lambda}\right).$$

Wird der Ausdruck $\frac{\underline{Ra}}{Z}$ mit m bezeichnet und konstant gehalten, d. h., $\frac{\underline{R}_x}{Z}$ ist nur eine Funktion von $\frac{l}{\lambda}$, so erhält man die

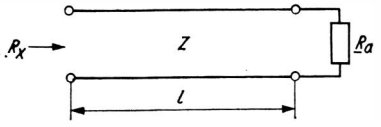


Bild 6.6
Widerstandsbezeichnungen an einem Leitungsstück

m-Kreise, die vorher als G-Kreise bezeichnet wurden. Der Mittelpunkt der m-Kreise befindet sich auf der reellen Achse. Läßt man den Ausdruck $\frac{l}{\lambda}$ konstant und betrachtet nur $\frac{\underline{R}_x}{Z}$ als Funktion von $\frac{\underline{R}_a}{Z}$, so entstehen die $\frac{l}{\lambda}$-Kreise, die vorher mit B-Kreise bezeichnet worden sind. Ihr Mittelpunkt liegt auf der imaginären Achse.

Bei der Anwendung des Widerstandsdiagramms für Leitungsberechnungen muß man die Zählrichtung beachten. Wird die Leitung vom Verbraucher aus betrachtet, so erfolgt die Zählrichtung im Uhrzeigersinn; erfolgt die Berechnung vom Generator aus, so zählt man entgegen dem Uhrzeigersinn.

Beispiel 6.5

Gegeben ist eine mit $\underline{R}_a$ abgeschlossene Leitung nach Bild 6.7 mit folgenden Werten:

$$Z = 60\,\Omega, \quad \underline{R}_a = 30\,\Omega, \quad l = 30\text{ cm}, \quad \lambda = 1\text{ m}.$$

Gesucht wird der Eingangswiderstand $\underline{R}_x$ nach Betrag und Phase.

Lösung

Diese Aufgabe läßt sich günstig vom Verbraucher aus lösen. Für den Punkt a der Leitung gelten somit folgende Beziehungen: Da $l = 0$ ist, ergibt sich für

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{0\text{ cm}}{100\text{ cm}} = 0$$

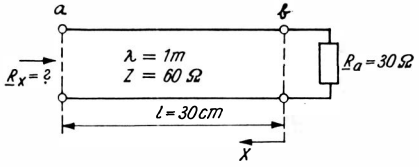


Bild 6.7
Zum Beispiel 6.5

und für

$$\frac{\underline{R}_a}{Z} = \frac{30\,\Omega}{60\,\Omega} = 0{,}5\,.$$

Der Punkt a = 0,5 liegt auf der reellen Achse.
Für den Punkt b der Leitung gilt folgende Beziehung:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{30\text{ cm}}{100\text{ cm}} \doteq 0{,}3\,.$$

Durch Punkt a verläuft der m-Kreis 2. Auf diesem Kreis wird nun von a an 0,3 weiter im Uhrzeigersinn gezählt. Eine halbe Umdrehung entspricht 0,25! Man erreicht den Punkt b, den der $\frac{l}{\lambda}$-Kreis 20 schneidet. Mit dem Hilfslineal lassen sich jetzt die Werte $\frac{\underline{R}_x}{Z}$ und $\frac{X_x}{Z}$ vom Punkt b aus zu den beiden Achsen abmessen. Man erhält für

$$\frac{R_x}{Z} = 1{,}55$$

und für

$$\frac{X_x}{Z} = -\,j0{,}7\,.$$

Nach R_x und X_x umgestellt und für $Z = 60\,\Omega$ eingesetzt, ergibt

$$R_x = Z \cdot 1{,}55 = 60\,\Omega \cdot 1{,}55 = 93\,\Omega\,,$$

$$X_x = Z \cdot (-j0{,}7) = 60\,\Omega \cdot (-j0{,}7) = -\,j42\,\Omega\,.$$

Der Eingangswiderstand der Leitung beträgt somit

$$\underline{R}_x = R_x - jX_x = (93 - j42)\,\Omega\,.$$

Der Betrag $\frac{|R_x|}{Z}$ entspricht einer Strecke von

$$\frac{|R_x|}{Z} = 1{,}7\,.$$

Nach $|\,R_x\,|$ umgestellt, ergibt

$$|\,R_x\,| = Z \cdot 1{,}7 = 60\,\Omega \cdot 1{,}7 = 102\,\Omega\,.$$

Die Phase bestimmt der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Zeiger $\frac{|\,R_x\,|}{Z}$. Der Winkel φ beträgt $-23°$.

Der Eingangswiderstand der Leitung in Exponentialschreibweise lautet also

$$\underline{R}_x = 102 \cdot e^{-j23°}\,\Omega\,.$$

In Bild 6.8 ist die Konstruktion im Widerstandsdiagramm dargestellt.

Der Eingangswiderstand wirkt kapazitiv bzw. hat eine kapazitive Komponente und ist direkt von der Länge l abhängig. Wäre z. B. $l = 0{,}25$, also $l = \frac{\lambda}{4}$, so würde der Punkt b genau auf der reellen Achse $\frac{R}{Z}$ liegen; d. h., dann wäre der Eingangswiderstand reell. Es wird auch hier bestätigt, daß ein Leitungsstück mit der Länge $l = \frac{\lambda}{4}$ Widerstände transformiert.

Im nächsten Beispiel wird der Eingangswiderstand einer Leitung bestimmt, die mit einem komplexen Außenwiderstand belastet ist.

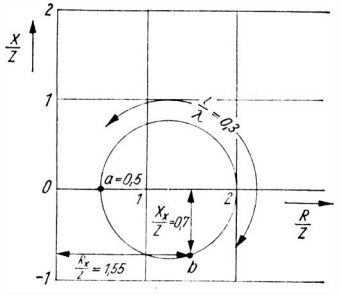


Bild 6.8
Zum Beispiel 6.5; Ermittlung des Eingangswiderstands einer Leitung bei Ohmschem Abschluß

Beispiel 6.6

Gegeben ist eine Leitung nach Bild 6.9 mit folgenden Eigenschaften:

$$Z = 60\,\Omega, \quad R_a = (30 + j90)\,\Omega, \quad l = 0{,}64\ \text{m},$$
$$\lambda = 1\ \text{m}.$$

Gesucht wird der Eingangswiderstand der Leitung.

Lösung

Man geht wieder vom Punkt a aus, d. h. vom Verbraucher, und zählt deshalb im Uhrzeigersinn.

Für Punkt a gilt

$$\frac{l}{\lambda} = 0\ ;$$

$$\frac{R_a}{Z} = \frac{30}{60} = 0{,}5\ ;$$

$$\frac{X_a}{Z} = \frac{j90}{60} = j1{,}5\ .$$

Diese beiden Strecken trägt man in das Diagramm ein (Bild 6.10) und erhält den Punkt a. Er wird geschnitten vom m-Kreis 7.

Für Punkt b gilt

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{0{,}64}{1} = 0{,}64\ .$$

Vom Punkt a aus ist also auf dem m-Kreis 7 insgesamt $\frac{l}{\lambda} = 0{,}64$ im Uhrzeigersinn hinzuzuzählen, um den Punkt b zu

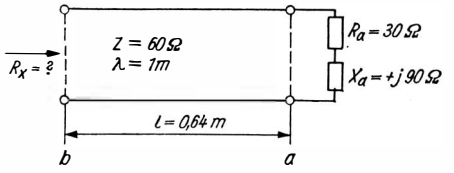


Bild 6.9
Zum Beispiel 6.6

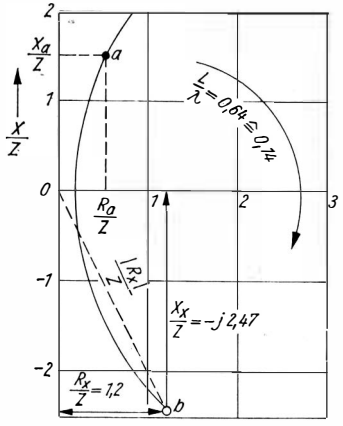


Bild 6.10
Zum Beispiel 6.6; Ermittlung des Eingangswiderstands bei komplexem Abschluß

erhalten. Da eine volle Umdrehung auf dem Diagramm $\frac{l}{\lambda} = 0{,}5$ ist, muß nur noch die Differenz von $0{,}64 - 0{,}5 = 0{,}14$ hinzugezählt werden. Man erreicht den in Bild 6.10 dargestellten Punkt b. Mit dem Hilfslineal lassen sich die Koordinaten des Punktes abmessen;

$$\frac{R_x}{Z} = 1{,}2 \quad \text{und} \quad \frac{X_x}{Z} = -\,j2{,}47\,.$$

Nach R_x und X_x umgestellt, ergibt

$$R_x = Z \cdot 1{,}2 = 60\,\Omega \cdot 1{,}2 = 72\,\Omega\,;$$

$$X_x = Z \cdot (-j2{,}47) = 60\,\Omega \cdot (-j2{,}47)\,,$$

$$X_x = j148{,}2\,\Omega\,.$$

Der Eingangswiderstand der Leitung ist somit

$$\underline{R}_x = R_x - jX_x = (72 - j148{,}2)\,\Omega\,.$$

Mißt man noch die Länge für den Betrag $\frac{R_x}{Z}$ ab und bestimmt den Winkel, so sind auch Betrag und Phase zu

$$\underline{R}_x = R_x \cdot e^{-j\varphi} ,$$

$$\underline{R}_x = 151 \cdot e^{-j64°}\,\Omega .$$

festgelegt. Die beiden gezeigten Beispiele der Leitungstechnik haben als Eingangswiderstand stets eine imaginäre Komponente. In der Praxis ist man nun oft an einem rein reellen Eingangswiderstand interessiert. Durch sogenannte Stichleitungen an den Leitungsenden lassen sich die dort vorhandenen Blindanteile kompensieren. Entscheidend dafür ist die Länge der Stichleitung.
Mit dem Widerstandsdiagramm können solche Stichleitungen schnell und einfach bestimmt werden.

Beispiel 6.7
Gegeben ist eine mit $R_a = 1500\,\Omega$ abgeschlossene Leitung nach Bild 6.11. Sie hat einen Z-Wert von 300 Ω. Der Eingangswiderstand soll ebenfalls 300 Ω betragen. Die Wellenlänge ist $\lambda = 2{,}5$ m.
Gesucht sind die Länge l der Leitung und die Länge l_{St} der Stichleitung.

Lösung
Vom Punkt a aus wird wieder zuerst die Lange l der Leitung errechnet. Hierfür gilt

$$\frac{R_a}{Z} = \frac{1500}{300} = 5 .$$

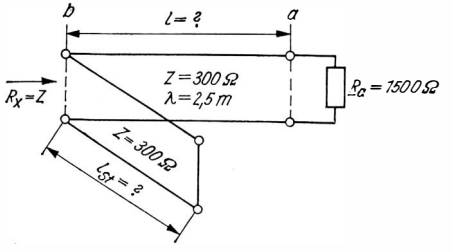


Bild 6.11 Zum Beispiel 6.7

Diesen Punkt trägt man in das Diagramm ein. Vom Punkt a aus wird auf dem m-Kreis 5 im Uhrzeigersinn bis zur senkrechten Linie des Wertes $\frac{R}{Z} = 1$ weitergezählt, denn nur dort kann der Realteil des Eingangswiderstands gleich dem Z-Wert der Leitung sein.

Man erhält einen Wert von $\frac{l}{\lambda} = 0{,}067$. Somit ist die gesuchte Leitungslänge

$$l = \lambda \cdot 0{,}067 = 2{,}5\ \text{m} \cdot 0{,}067 = 0{,}168\ \text{m}.$$

Am Punkt b mißt man mit dem Hilfslineal den Real- und Imaginärteil des Eingangswiderstands ab und erhält

$$\frac{R_x}{Z} = 1\,,$$

$$R_x = Z \cdot 1 = 300\,\Omega \cdot 1 = 300\,\Omega\ ;$$

$$\frac{X_x}{Z} = -\,j1{,}8\,,$$

$$X_x = Z \cdot (-j1{,}8) = 300\,\Omega \cdot (-j1{,}8) = -\,j540\,\Omega\,.$$

Der Eingangswiderstand beträgt also

$$\underline{R}_x = (300 - j540)\,\Omega\,.$$

Nun muß durch Anschalten einer Stichleitung die vorhandene kapazitive Komponente kompensiert werden, da gefordert wurde, den Eingangswiderstand vollkommen reell zu machen. Die Stichleitung läßt sich im Kurzschluß oder im Leerlauf betreiben. Im Beispiel ist eine kurzgeschlossene Stichleitung eingesetzt, die ebenfalls einen Z-Wert von 300 Ω aufweist. Dazu wird die Strecke vom Punkt b zum Punkt 0 durch Parallelverschiebung in das induktive Gebiet des Diagramms übertragen. Es ergibt sich der in Bild 6.12 eingezeichnete Punkt c auf der imaginären Achse. Von diesem Punkt c aus zählt man nun im Uhrzeigersinn auf dem $\frac{l}{\lambda}$-Kreis bis zur reellen Achse,

d. h. bis zum Punkt $\frac{R}{Z} = 1$, und erhält für

$$\frac{l_{St}}{\lambda} = 0{,}082\,.$$

Die Länge der Stichleitung beträgt also

$$l_{St} = \lambda \cdot 0{,}082 = 2{,}5\ \text{m} \cdot 0{,}082 = 20{,}5\ \text{cm}\,.$$

Damit ist der kapazitive Anteil der Leitung von $-j540\,\Omega$ kompensiert, so daß der Eingang nur noch den reellen Widerstand $R_x = 300\,\Omega$ aufweist.

In Bild 6.12 ist die Konstruktion im Diagramm dargestellt. Die Beispiele der Leitungstechnik waren immer nur für sehr kurze Leitungslängen ausgelegt. In der Praxis können Leitungen jedoch wesentlich länger sein. Es ergeben sich natürlich auch bei anderen Leitungslängen die gleichen Verhältnisse, da ja im Abstand $\frac{\lambda}{2}$ stets der gleiche Eingangswiderstand auftritt.

Auch im Diagramm ist das deutlich sichtbar und anschaulich. Da eine volle Umdrehung im Diagramm auf einem m-Kreis

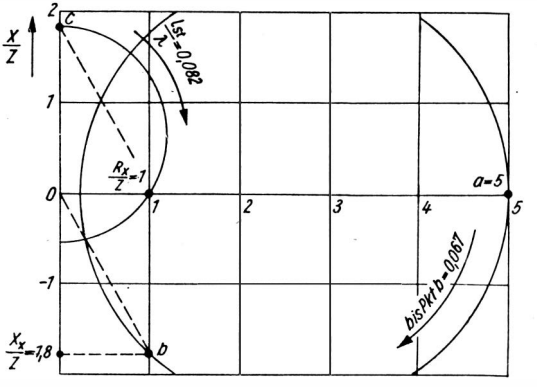


Bild 6.12 Zum Beispiel 6.7; Berechnung der Stichleitung

einem Verhältnis $\frac{l}{\lambda} = 0{,}5$ entspricht, erreicht man immer wieder den gleichen Punkt, unabhängig davon, wie oft eine solche Umdrehung vorgenommen wird.

Das bedeutet, die Leitung kann auch $n \cdot \frac{\lambda}{2}$ länger sein als die in den Beispielen errechneten Werte. Der Eingangswiderstand ändert dabei seinen Wert nicht.

6.2. Das Smith-Diagramm

Das *Smith*-Diagramm weist entgegen dem Widerstandsdiagramm keine geradlinigen Koordinaten auf. Nur die reelle Achse $\frac{R}{Z}$ ist als Durchmesser des äußeren Kreises noch vorhanden. Die imaginäre $\frac{X}{Z}$-Achse wurde durch konforme Abbildung in den äußeren Einheitskreis umgewandelt und begrenzt gleichzeitig das Diagramm von außen.

Wie beim Widerstandsdiagramm liegt oberhalb der $\frac{R}{Z}$-Achse das induktive und unterhalb der $\frac{R}{Z}$-Achse das kapazitive Gebiet. Die äußere Umrandung gibt das Verhältnis $\frac{l}{\lambda}$ an, und zwar einmal in Richtung Generator, d. h. im Uhrzeigersinn, und zum anderen in Richtung Endlast, d. h. entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Da das *Smith*-Diagramm eine endliche Ausdehnung hat, ist es genauer als das Widerstandsdiagramm. Die Ableitung der Kreisgleichungen, die zur Entstehung des *Smith*-Diagramms führen, sind in [1] und [2] angegeben.

Das *Smith*-Diagramm ist der Broschüre beigelegt.

Zur Veranschaulichung der Anwendung sollen einige Beispiele mit Hilfe des Diagramms gelöst werden.

6.2.1. Umwandlung von Widerständen in Leitwerte und umgekehrt

Beispiel 6.8
Gegeben ist der komplexe Widerstand $\underline{Z} = (1{,}4 + j1{,}2)\,\Omega$.
Gesucht wird der komplexe Leitwert $\underline{G}$.

Lösung
Die Konstruktion ist sehr einfach. Wie Bild 6.13 zeigt, wird der Punkt $\underline{Z}$ am Mittelpunkt $\frac{R}{Z} = 1$ gespiegelt und man erhält den Leitwert $\underline{G}$. Er beträgt

$$\underline{G} = (0{,}41 - j0{,}35)\ \mathrm{S}\,.$$

Beispiel 6.9
Gegeben ist der komplexe Leitwert $\underline{G} = (120 + j90)\ \mu\mathrm{S}$.
Gesucht wird der komplexe Widerstand $\underline{Z}$.

Lösung
Mit einem Reduktionsfaktor muß man $\underline{G}$ in eine entsprechende Größenordnung verwandeln, um den Wert in das Diagramm einzeichnen zu können. Mit dem Reduktionsfaktor 10^4 ergibt sich

$$\underline{G} \cdot 10^4 = (1{,}2 + j0{,}9)\ \mathrm{S}\,.$$

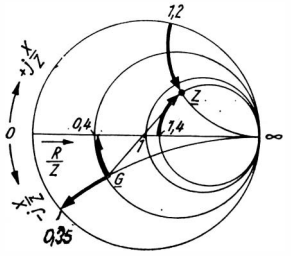


Bild 6.13
Zum Beispiel 6.8 und zum Beispiel 6.9; Umwandlung von Widerständen in Leitwerte und umgekehrt

Dieser Wert wird in das Diagramm eingetragen und wieder am Punkt $\frac{R}{Z} = 1$ gespiegelt. $\underline{Z}$ ist dann

$$\frac{\underline{Z}}{10^4} = (0{,}53 - j0{,}4)\,\Omega\,,$$

$$\underline{Z} = 10^4 \cdot (0{,}53 - j0{,}4)\,\Omega\,,$$

$$\underline{Z} = (5{,}3 - j4)\,k\Omega\,.$$

Die Konstruktion erfolgt also analog dem Beispiel 6.8, nur umgekehrt.

6.2.2. Aufgaben aus der Leitungstechnik

Mit dem *Smith*-Diagramm lassen sich vorteilhaft Aufgaben der Leitungstheorie lösen.

Beispiel 6.10
Gegeben ist eine Leitung nach Bild 6.14 mit den Werten $Z = 60\,\Omega$, $R_a = 30\,\Omega$, $l = 1$ m, $\lambda = 2{,}5$ m.

Gesucht wird der Eingangswiderstand $\underline{R}_x$ der Leitung.

Lösung
Man geht vom Leitungsende, d. h. vom Punkt a aus. Hier ist $\frac{l}{\lambda} = 0$ und $\frac{R_a}{Z} = \frac{30}{60} = 0{,}5$. Dieser Punkt wird auf der $\frac{R}{Z}$-Achse

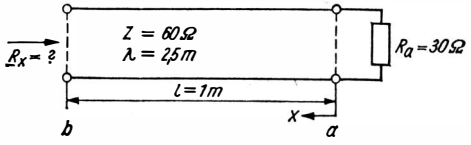


Bild 6.14 Zum Beispiel 6.10

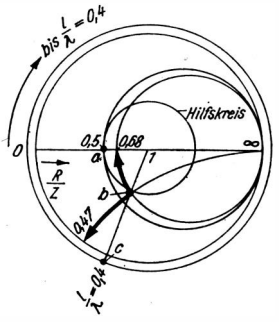


Bild 6.15
Zum Beispiel 6.10; Ermittlung des Eingangswiderstands einer Leitung

angetragen und durch ihn ein Hilfskreis geschlagen, dessen Mittelpunkt im Punkt $\frac{R}{Z}=1$ liegt (Bild 6.15).

Um zum Punkt b zu gelangen, muß man auf der $\frac{l}{\lambda}$-Skale eine Strecke von

$$\frac{l}{\lambda}=\frac{1\text{ m}}{2{,}5\text{ m}}=0{,}4$$

hinzuzählen, und zwar im Uhrzeigersinn. Es entsteht der mit bezeichnete Punkt. Von ihm wird eine Gerade zum Punkt $\frac{R}{Z}=1$ gezogen. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Hilfskreis ergibt den gesuchten Punkt b, d. h. gleichzeitig $\underline{R}_x$ Von b aus zieht man zur $\frac{R}{Z}$-Achse, zum äußeren $\frac{jX}{Z}$-Kreis.

$$\frac{R_x}{Z}=0{,}68 \qquad \text{und} \qquad \frac{X_x}{Z}=-\,j0{,}47$$

läßt sich dann entsprechend ablesen.
Somit ist

$$R_x=Z\cdot 0{,}68=60\,\Omega\cdot 0{,}68=40{,}8\,\Omega$$

und

$$X_x=Z\cdot(-j0{,}47)=60\,\Omega\cdot(-j0{,}47)=-j28{,}2\,\Omega\,.$$

Der Eingangswiderstand ergibt sich also zu

$$\underline{R}_x = R_x - jX_x = (40{,}8 - j28{,}2)\,\Omega\,.$$

Beispiel 6.11
Gegeben ist die in Bild 6.15 dargestellte Leitung mit den Werten $Z = 60\,\Omega$, $\underline{R}_a = (30 + j90)\,\Omega$, $l = 0{,}64$ m, $\lambda = 1$ m. Gesucht wird der Eingangswiderstand $\underline{R}_x$.

Lösung
Man legt zuerst den Punkt a im Diagramm fest. Er beträgt

$$\frac{R_a}{Z} = \frac{30}{60} = 0{,}5$$

und

$$\frac{X_a}{Z} = \frac{j90}{60} = j1{,}5\,.$$

Nun wird durch den Punkt a wieder ein Hilfskreis, dessen Mittelpunkt bei $\frac{R}{Z} = 1$ liegt, gezeichnet. Mit einer Hilfsgeraden läßt sich der Punkt $\frac{R}{Z} = 1$ mit dem Punkt a verbinden und man erhält den mit c bezeichneten Punkt auf der $\frac{l}{\lambda}$-Skale.

Für Punkt b der Leitung gilt

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{0{,}64\text{ m}}{1\text{ m}} = 0{,}64\,.$$

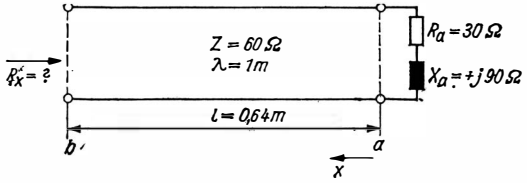


Bild 6.16 Zum Beispiel 6.11

Da ein voller Umlauf bereits $\frac{l}{\lambda} = 0{,}5$ darstellt, sind im Uhrzeigersinn nur noch 0,14 weiterzuzählen und der mit d bezeichnete Punkt ist festgelegt. Dieser wird durch eine Gerade mit dem Punkt $\frac{R}{Z} = 1$ der reellen Achse verbunden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Hilfskreis ergibt den gesuchten Punkt b. Er hat die „Koordinaten"

$$\frac{R_x}{Z} = 1{,}2 \qquad \text{und} \qquad \frac{X_x}{Z} = j2{,}45\,.$$

Nach R_x und X_x umgestellt, erhält man

$$R_x = Z \cdot 1{,}2 = 60\,\Omega \cdot 1{,}2 = 120\,\Omega\,.$$

$$X_x = Z \cdot (-j2{,}45) = 60\,\Omega\,(-j2{,}45) = -\,j147\,\Omega\,.$$

Der Eingangswiderstand beträgt somit

$$\underline{R}_x = (120 - j147)\,\Omega\,.$$

Bild 6.17 zeigt die Konstruktion im Diagramm.

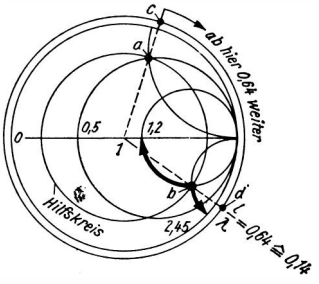


Bild 6.17
Zum Beispiel 6.11; Ermittlung des Eingangswiderstands bei komplexer Last

7. Ausgewählte Beispiele zur praktischen Anwendung von Ortskurven

In diesem Abschnitt sollen einige ausgewählte Beispiele aus der Praxis behandelt werden, bei denen man mit Ortskurven das Frequenzverhalten von Bauelementen darstellt. Damit ist der Kreis zwischen den theoretischen Behandlung und der praktischen Anwendung geschlossen. Der Abschnitt verdeutlicht noch einmal, wie zweckmäßig die Ortskurvendarstellungen für bestimmte Probleme in der Praxis sind.

7.1. Ortskurve des Eingangswiderstands eines Halbwellendipols mit T-Abgriff

In Bild 7.1 ist der bekannte Halbwellendipol mit T-Abgriff dargestellt. Er kann nach [3] mit folgenden normierten Parametern beschrieben werden:

Durchmesserverhältnis	$\frac{d_1}{d_2}$
Schlankheitsgrad	$\frac{\lambda}{d_1}$
normierter Abstand	$\frac{a}{\lambda}$
normierte Länge	$\frac{l_1}{\lambda}$
normierter Abgriff	$\frac{l_2}{l_1}$

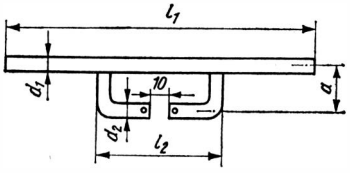


Bild 7.1
Halbwellendipol
mit T-Abgriff

Für die praktischen Berechnungen werden nachstehende Voraussetzungen und Einschränkungen getroffen:

— Das Durchmesserverhältnis ist Eins, d. h. $d_1 = d_2$.

— Der Schlankheitsgrad $\frac{\lambda}{d_1}$ wird als konstant angesehen und für eine Frequenz von $f = 200$ MHz auf $\frac{\lambda}{d_1} = 150$ festgelegt.
Das verwendete Material hat somit eine Stärke von etwa 10 mm.

— Der normierte Abstand $\frac{a}{\lambda}$ bleibt ebenfalls konstant und wird für $f = 200$ MHz mit $\frac{a}{\lambda} = 0{,}033$ als zweckmäßig angegeben.
Somit ist a etwa 50 mm.

— Die normierte Länge $\frac{l_1}{\lambda}$ beträgt etwa 0,45, d. h., die Gesamtlänge des Dipols ist $l_1 = 700$ mm.

Mit den getroffenen Konstanten

$$\frac{d_1}{d_2} = 1$$

$$\frac{\lambda}{d_1} = 150$$

$$\frac{a}{\lambda} = 0{,}033$$

$$l_1 = 700 \text{ mm}$$

sind in [3] anschaulich die meßtechnisch erfaßten Ortskurven des Eingangswiderstands abhängig von der Frequenz (170 MHz bis 230 MHz) angegeben. Dabei stellt der normierte Abgriff

$\frac{l_2}{l_1}$ den Parameter dar, d. h., die Ortskurven sind für verschiedene $\frac{l_2}{l_1}$-Verhältnisse aufgenommen. In Bild 7.2 (siehe Beilage) sind 3 dieser Kurven wiedergegeben:

Kurve 1 mit dem Verhältnis $\frac{l_2}{l_1} = 1$,

Kurve 2 mit dem Verhältnis $\frac{l_2}{l_1} = 0{,}4$,

Kurve 3 mit dem Verhältnis $\frac{l_2}{l_1} = 0{,}2$.

Nur die Kurve 1 schneidet die reelle Achse. Die beiden anderen Kurven liegen oberhalb der reellen Achse. Da das Diagramm auf $Z = 240\,\Omega$ normiert wurde, ergibt sich der Eingangswiderstand des Dipols zu

$$\underline{R}_e = Z \cdot (a + jb) = 240\,(a + jb)\,\Omega\,.$$

Die Auswertung dieser 3 Ortskurven zeigt:

Kurve 1 schneidet die reelle Achse $\frac{R}{Z}$ bei einer Frequenz von $f = 192{,}5$ MHz, d. h., bei dieser Frequenz weist der Dipol Resonanz auf, der Eingangswiderstand ist reell (der 2. Durchgang durch die reelle Achse stellt auch eine Resonanzstelle dar, hat aber in diesem Fall keine Bedeutung, da sich bei dieser Frequenz das Strahlungsdiagramm des Dipols verändert). An der Schnittstelle mit der reellen Achse wird

$$\frac{R}{Z} = 1{,}15$$

abgelesen, d. h., der Eingangswiderstand beträgt

$$\underline{R}_e = Z \cdot (1{,}15 + j0) = 240 \cdot 1{,}15 = 276\,\Omega\,.$$

Der Anschluß eines Bandkabels mit einem Z-Wert zwischen $240\,\Omega$ und $300\,\Omega$ ist also bei diesem Dipol möglich. Die Praxis bestätigt auch diese theoretischen Erkenntnisse. Das gewählte

Verhältnis $\frac{l_2}{l_1} = 1$, d. h. $l_2 = l_1$ drückt ja aus, daß es sich hier um den bekannten Schleifendipol als Spezialfall der T-Anpassung handelt; und der Schleifendipol hat bekanntlich einen Eingangswiderstand in oben genannter Größenordnung.
Bei *Kurve 2* und *Kurve 3* tritt keine Resonanzstelle mehr auf. Der Eingangswiderstand ist bei allen Frequenzen zwischen 170 MHz und 230 MHz komplex. So sind bei der Frequenz von f = 192,5 MHz, bei der der Eingangswiderstand der Dipolschleife reell ist (Kurve 1), die Eingangswiderstände des Halbwellendipols

$$\underline{R}_e = 240 \cdot (1{,}8 + j0{,}95) = (432 + j228)\,\Omega \quad \text{(Kurve 2)}$$

und

$$\underline{R}_e = 240 \cdot (0{,}3 + j0{,}65) = (72 + j165)\,\Omega \quad \text{(Kurve 3)}.$$

Man kann also an Hand der Ortskurven feststellen, daß sich mit dem T-Abgriff verschiedene reelle Komponenten des Eingangswiderstands einstellen lassen, d. h., es ist damit möglich, eine Widerstandstransformation in bestimmten Grenzen vorzunehmen. Das hat praktische Bedeutung für die Anpassung des Dipols an ein entsprechendes Energiekabel.

7.2. Ortskurven des Scheinwiderstands von Stabilisatorröhren

Röhren zur Stabilisierung von mittleren Gleichspannungen sind auch heute noch üblich. Dabei interessiert im Normalfall nicht, daß der Innenwiderstand der Stabilisatorröhre stark von der Frequenz abhängt.

Treten jedoch in der Speisespannung bzw. im Laststrom höhere Frequenzen auf, so ist der Einfluß des frequenzabhängigen Innenwiderstands auf den Frequenzgang des Stabilisierungsfaktors und des Innenwiderstands solcher Schaltungen nicht mehr zu vernachlässigen. Hohe Frequenzen können bei solchen Schaltungen auftreten, bei denen impulsförmige Laständerungen möglich sind. Auch vorgeschaltete gasgefüllte Gleichrichterröhren rufen eventuell Störfrequenzen im kHz-Bereich hervor.

In [4] wurden an einer Stabilisatorröhre *StR 85/10* solche meßtechnischen Untersuchungen durchgeführt. Bild 7.3 zeigt die Ortskurven des Scheinwiderstands der *StR 85/10* im Bereich von 0 Hz bis 200 kHz. Dabei wird der Betriebsstrom als Parameter verwendet. Die Ortskurven sind bei einem Betriebsstrom von $I_B = 1{,}5$; 2; 3 und 4 mA aufgenommen. An Hand der Ortskurven läßt sich erkennen, daß der Scheinwiderstand

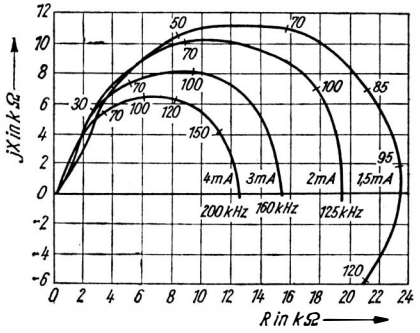


Bild 7.3 Ortskurve des Scheinwiderstands einer *StR 85/10* mit dem Betriebsstrom als Parameter (nach [4])

mit steigender Frequenz größer wird und vorwiegend induktives Verhalten zeigt. Erst bei höheren Frequenzen wird er wieder reell. Durch Parallelschalten einer Kapazität C_p zur Stabilisatorröhre muß es also möglich sein, das induktive Verhalten der Röhre zu verringern. Bild 7.4 bestätigt diese Schlußfolgerung. Es sind hier die beiden Ortskurven bei einem Betriebsstrom von 3 mA einmal ohne Parallelkapazität und einmal mit einer Parallelkapazität von 10 nF gegenübergestellt. Die dargestellten Ortskurven für die *StR 85/10* gelten prinzipiell auch für andere Stabilisatorröhren und können deshalb sinngemäß übertragen werden.

7.3. Ortskurven von Transistoren

Das dynamische Verhalten von Transistoren wird in der Praxis allgemein durch die Vierpolparameter bestimmt. Die Kenntnis dieser Parameter ist zur Beurteilung des Transistorverhaltens in den entsprechenden Grundschaltungen und bei verschiedenen Frequenzen unbedingt notwendig.
Während man bei niedrigen Frequenzen die reellen Vierpol-

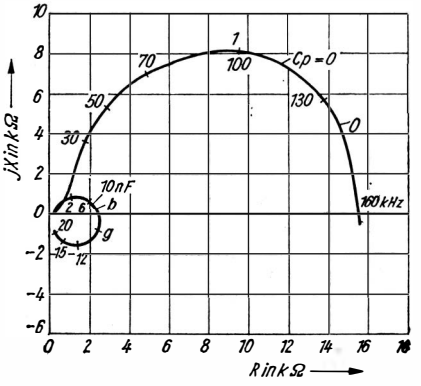


Bild 7.4 Ortskurven des Scheinwiderstands bei $I_B = 3$ mA; a — ohne Parallelkapazität, b — mit Parallelkapazität

parameter, d. h. die h-Parameter anwendet, wird bei hohen Frequenzen, z. B. im VHF- und UHF-Gebiet, das Verhalten der Transistoren durch die komplexen Leitwertparameter, also durch die y-Parameter, beschrieben.
Da sich diese y-Parameter abhängig von der Frequenz ändern, ist es zweckmäßig, deren Verlauf als Ortskurven darzustellen. Von der Industrie werden solche Ortskurven meßtechnisch erfaßt und gemeinsam mit den Datenblättern veröffentlicht. Je nach Anwendungsgebiet der Transistoren ist sie für die Basis- oder Emitterschaltung dargestellt. Bild 7.5 zeigt ein Ersatzschaltbild, das für alle 3 Grundschaltungen Gültigkeit hat, mit dem man die y-Parameter bestimmen kann.
Danach ergibt sich das Gleichungssystem

$$i_1 = y_{11} \cdot u_1 + y_{12} \cdot u_2 ,$$

$$i_2 = y_{12} \cdot u_1 + y_{22} \cdot u_2 .$$

Dabei haben die y-Parameter folgende Bedeutung:

Eingangsleitwert $y_{11} = \frac{i_1}{u_1} = g_{11} + jb_{11}$ (Ausgang kurzgeschlossen)

Rückwirkleitwert $y_{12} = \frac{i_1}{u_2} = g_{12} + jb_{12}$ (Eingang kurzgeschlossen)

Steilheit $y_{21} = \frac{i_2}{u_1} = g_{21} + jb_{21}$ (Ausgang kurzgeschlossen)

Ausgangsleitwert $y_{22} = \frac{i_2}{u_2} = g_{22} + jb_{22}$ (Eingang kurzgeschlossen)

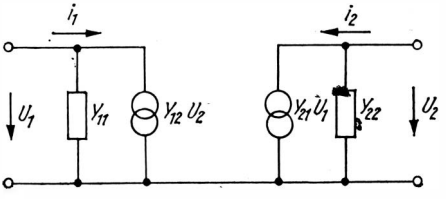


Bild 7.5 Transistorersatzschaltung zur Bestimmung der y-Parameter

Für diese 4 Leitwertparameter sind die Ortskurven des Transistors *GF 145* in Basisschaltung in Bild 7.6 bis Bild 7.9 dargestellt. Der Kollektorstrom — Ic beträgt 1,5 mA bei $-U_{CB} = 12$ V. Der Frequenzbereich liegt zwischen f = 40 MHz bis f = 800 MHz.

Wie sich die Parameter des Transistors *GF 145* in Abhängigkeit der Frequenz ändern, läßt die folgende Gegenüberstellung bei f = 100 MHz und 800 MHz erkennen:

	f = 100 MHz	f = 800 MHz
y_{11b}:	(47 − j12) mS	(5,5 − j14,5) mS
y_{12b}:	(−0,04 − j0,08) mS	(−0,27 − j0,31) mS
y_{21b}:	(−41 + j17) mS	(10 + j12) mS
y_{22b}:	(0,02 + j0,9) mS	(0,4 + j7,5) mS

Mit Hilfe der Ortskurven ist man also in der Lage, die Parameter für die interessierenden Frequenzen sofort abzulesen

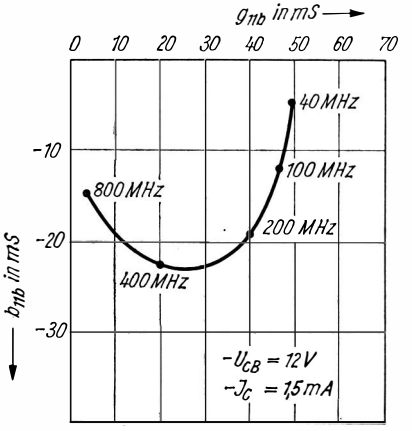


Bild 7.6 Ortskurve des Eingangsleitwerts y_{11b} des Transistors *GF 145*

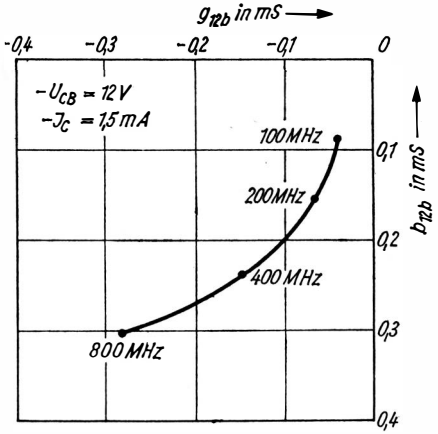


Bild 7.7 Ortskurve des Rückwirkleitwerts y_{12b} des Transistors *GF 145*

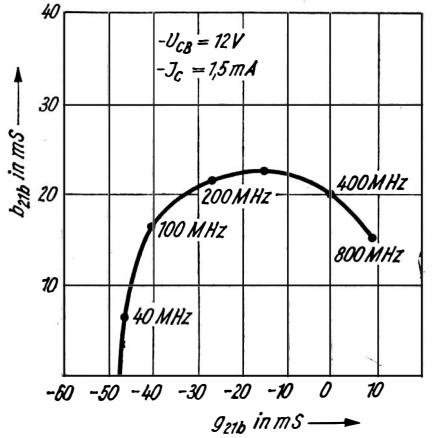


Bild 7.8 Ortskurven der Steilheit y_{21b} des Transistors *GF 145*

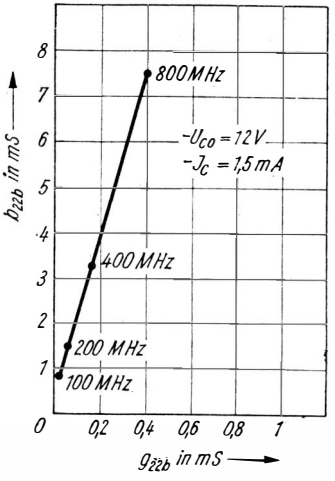


Bild 7.9
Ortskurve des Ausgangsleitwerts y_{22b} des Transistors *GF 145*

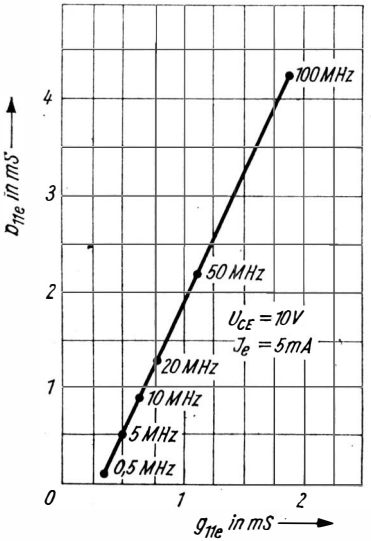


Bild 7.10
Ortskurve des Eingangsleitwerts y_{11e} des Transistors *SF 136*

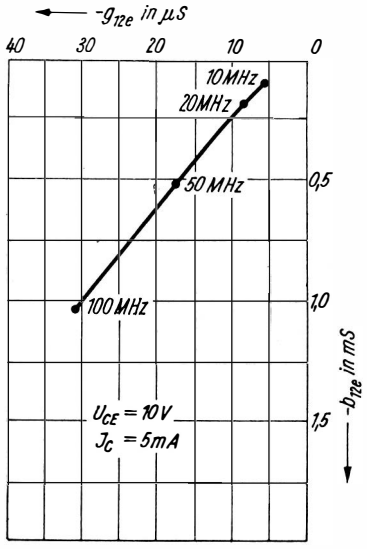


Bild 7.11
Ortskurve des Rückleitwerts y_{12e} des Transistors *SF 136*

und sie bei der Berechnung der Betriebsgrößen zu berücksichtigen.

Zur Gegenüberstellung mit dem UHF-Transistor *GF 145* sind in Bild 7.10 bis Bild 7.13 die Ortskurven der y-Parameter des Siliziumtransistors *SF 136* in Emitterschaltung angegeben. Da dieser Transistor nur eine Übergangsfrequenz von $f_T = 300$ MHz hat, wird er zweckmäßigerweise in Emitterschaltung betrieben. Die Herstellerbetriebe veröffentlichen deshalb auch die Ortskurven der y-Parameter nur in dieser Schaltung. Aus den Ortskurven ersieht man z. B. für die Frequenz f = 50 MHz die folgenden y-Parameter:

$$y_{11e} = (2{,}2 + j3{,}5)\ \text{mS}$$
$$y_{12e} = (0{,}017 + j0{,}58)\ \text{mS}$$
$$y_{21e} = (35 + j39)\ \text{mS}$$
$$y_{22e} = (1{,}15 + j1{,}3)\ \text{mS}\,.$$

In den gezeigten Ortskurven ist der Kollektorstrom konstant. In den von den Herstellerbetrieben gelieferten Darstellungen

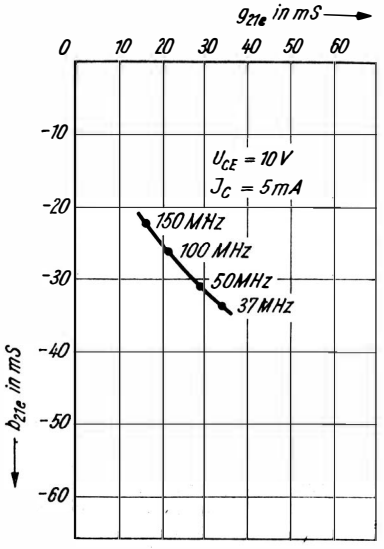


Bild 7.12
Ortskurve der Steilheit y_{21e} des Transistors *SF 136*

sind jedoch die Ortskurven für verschiedene Kollektorströme aufgenommen, so daß Ortskurvenscharen zur Verfügung stehen.

7.4. Ortskurve eines Anpassungsübertragers

Während in der Starkstromtechnik der Transformator hauptsächlich zur Transformierung einer Wechselspannung unter den Gesichtspunkten der günstigsten Übersetzverhältnisse für Spannung und Strom sowie des optimalsten Wirkungsgrads eingesetzt wird, ist man in der Schwachstromtechnik bestrebt, an einen Verbraucher R_a die maximale Wirkleistung $I^2 \cdot R_a$ abzugeben.
Wird ein idealer Transformator vom Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$$

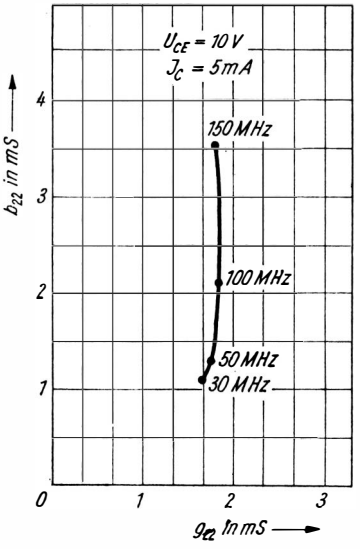


Bild 7.13
Ortskurve des Ausgangsleitwerts y_{22e} des Transistors *SF 136*

mit dem Widerstand R_a belastet, so ist sein Eingangswiderstand

$$\underline{R}_e = \ddot{u}^2 \cdot \underline{R}_a .$$

Will man also einen Verbraucher $\underline{R}_a$ an eine Wechselspannungsquelle mit dem Innenwiderstand $\underline{R}_i$ anpassen, so ist ein Anpassungsübertrager mit dem Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{\underline{R}_i}{\underline{R}_a}}$$

zwischen Spannungsquelle und Verbraucher zu schalten.
Diese Betrachtungen gelten aber nur für den idealen Transformator. Beim technischen Anpassungsübertrager ist zu beachten, daß das Übersetzungsverhältnis von der Frequenz abhängt, da ja bekanntlich nicht nur eine einzelne Frequenz, sondern ein ganzer Frequenzbereich, z. B. das NF-Band, übertragen werden soll.

Der vereinfachte Ersatzstromlaufplan des technischen Übertragers ist in Bild 7.14 gezeigt.
Nach dieser Schaltung ist der Eingangswiderstand

$$\underline{R}_e = \ddot{u}^2 \cdot R_a \left(\frac{1}{1 + \frac{\ddot{u}^2 \cdot R_a}{j\omega L_1}} \right) + j\omega \sigma L_1 ;$$

wobei $\sigma = 1 - k^2$ den Streufaktor darstellt.
Der Eingangswiderstand des technischen Übertragers unterscheidet sich erheblich vom Eingangswiderstand des idealen Übertragers.
Der Eingangswiderstand ist also frequenzabhängig und kann in Form einer Ortskurve dargestellt werden.
Welche Ortskurve ist zu erwarten?
Für niedrige Frequenzen kann man den Ausdruck $j\omega\sigma L_1$ vernachlässigen, d. h., es handelt sich nur noch um eine Parallelschaltung von $j\omega L_1$ und $\ddot{u}^2 \cdot R_a$. Als Ortskurve für eine solche Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität entsteht bekanntlich ein Halbkreis oberhalb der reellen Achse. Bei hohen Frequenzen wird der Ausdruck $j\omega\sigma L_1$ mitbestimmt, und der Imaginärteil des Eingangswiderstands steigt proportional zur Frequenz an.
Bild 7.15 zeigt die Ortskurve des Eingangswiderstands eines Anpassungsübertragers mit einem Windungsverhältnis von

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{240\ \text{Wdg}}{24\ \text{Wdg}}$$

innerhalb des Frequenzbereichs von $f = 0$ Hz bis $f = 15$ kHz bei einem konstanten R_a von $2\,\Omega$.

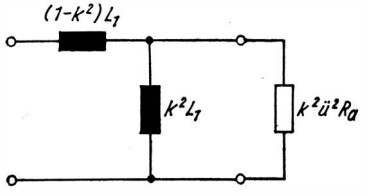


Bild 7.14
Vereinfachte Ersatzschaltung eines Anpassungsübertragers

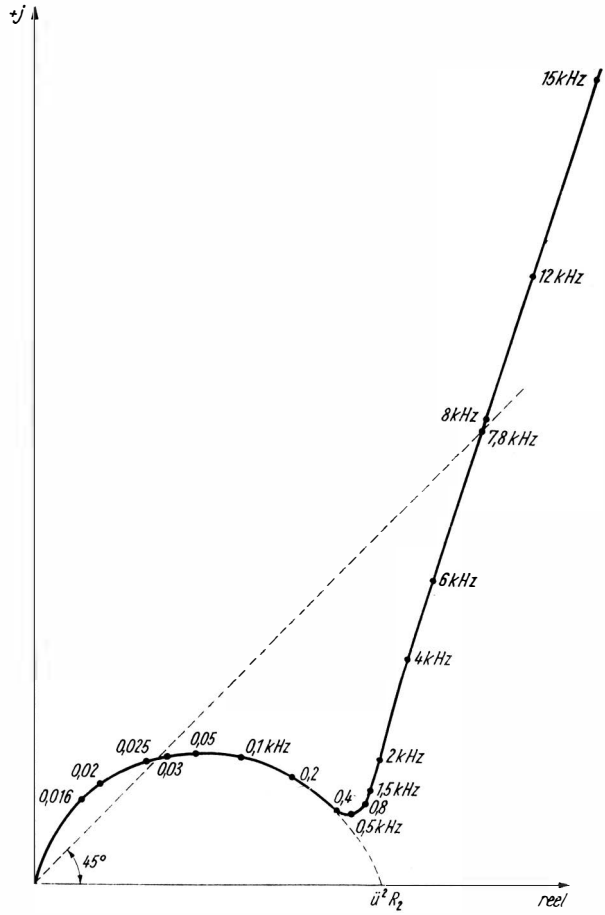


Bild 7.15 Ortskurve des Eingangswiderstands eines Anpassungsübertragers

Die Ortskurve bestätigt die oben gemachten Angaben über das Verhalten des Eingangswiderstands $\underline{R}_e$ in Abhängigkeit der Frequenz. Die obere und untere Grenzfrequenz des Übertragungsbereichs läßt sich aus der Ortskurve ebenfalls ersehen. Dazu zieht man eine Gerade im Winkel von 45° zur reellen Achse. Die Schnittpunkte mit der Ortskurve sind die 45°-Frequenzen. Der Übertragungsbereich des Anpassungsübertragers liegt also zwischen $f_1 = 30$ Hz und $f_2 = 7{,}8$ kHz.

8. Literaturhinweise

[1] *Autorenkollektiv:* Grundlagen der Elektrotechnik, Band II, Wechselspannungstechnik, VEB Verlag Technik Berlin 1969

[2] *Kammerloher, J.:* Hochfrequenztechnik Teil I, C. F. Wintersche Verlagshandlung Füssen 1957

[3] *Spindler, E.:* Anpassung von Halbwellendipolen an das Energiekabel, „radio und fernsehen", 13. Jahrgang (1964), Heft 14

[4] *Becker, W.:* Frequenzverhalten von Stabilisatorröhren, „radio, fernsehen, elektronik" 20. Jahrgang (1971), Heft 12

[5] —, Kataloge für Silizium- und Germaniumtransistoren, Kombinat VEB Halbleiterwerke Frankfurt (Oder), Ausgabe 1970/71

LEER

2. Auflage, 1978, 11.—30. Tausend
Cheflektorat Militärliteratur
Lizenz-Nr. 5 · LSV 3539
Lektor: Rainer Erlekampf
Zeichnungen: H. Malchow
Korrektor: Eva Plake
Typografie: Helmut Herrmann
Hersteller: Michael Haase
Printed in the German Democratic Republik
Gesamtherstellung: Druckerei Märkische Volksstimme Potsdam
Redaktionsschluß: 20. 01. 78
Bestellnummer: 746 011 9
DDR 1,90 M

LEER

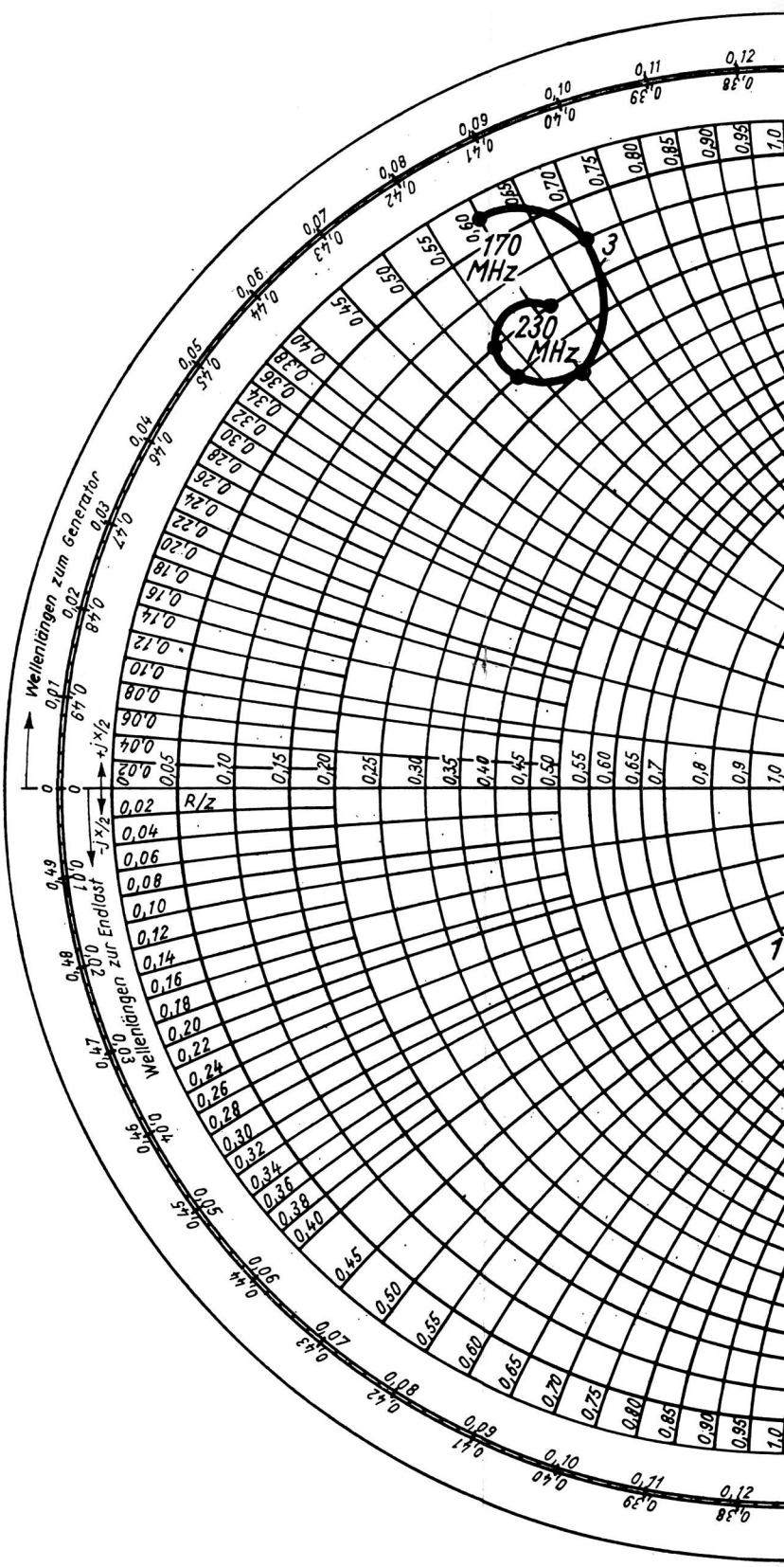
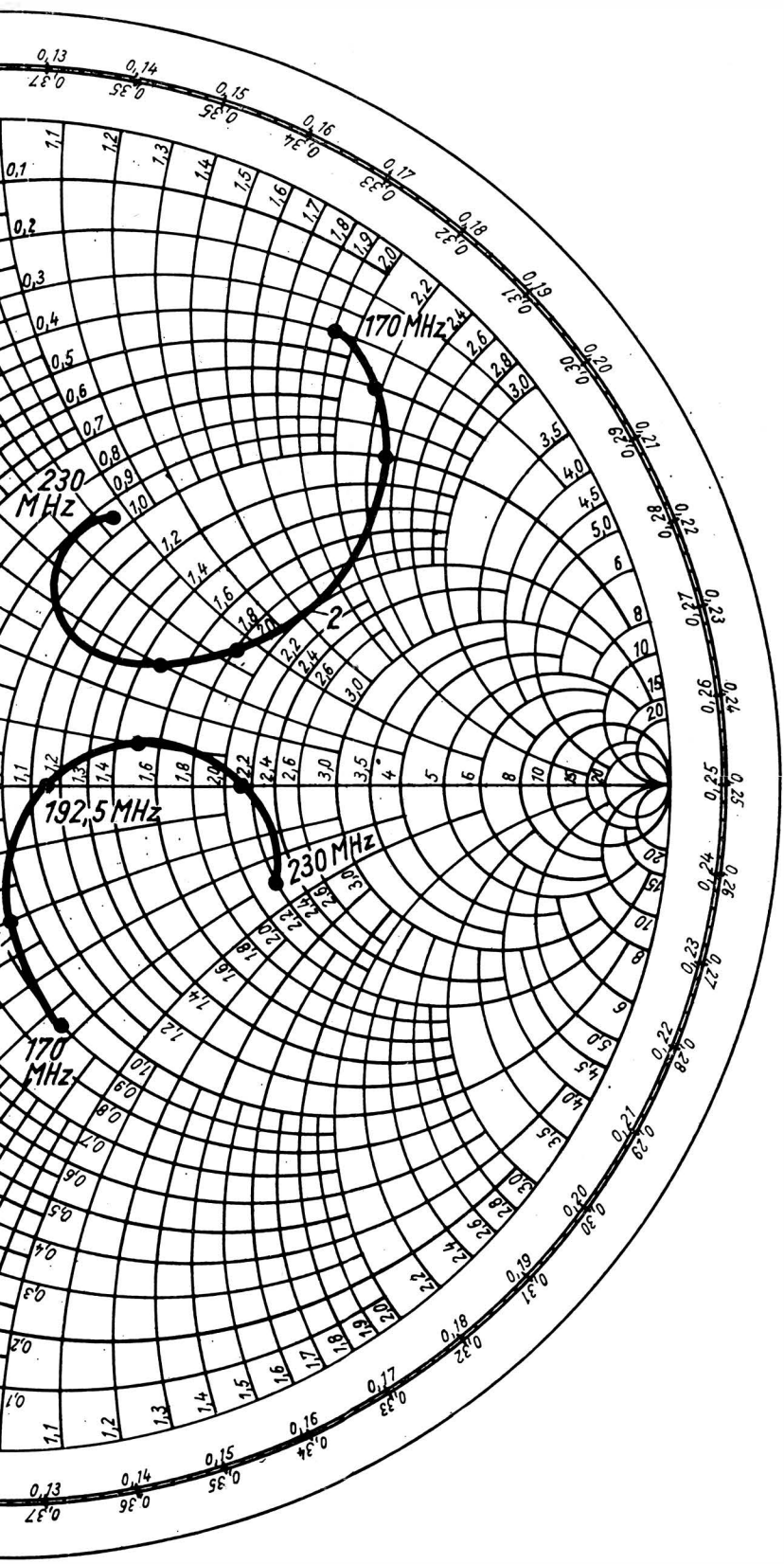


Bild 7.2 Ortskurven des Eingangswiderstandes eines Halbwellendipols mit T-Abgriff (nach [3])



0,5 1 1,5 2 2,5

Hilfslineal zum Widerstandsdiagramm